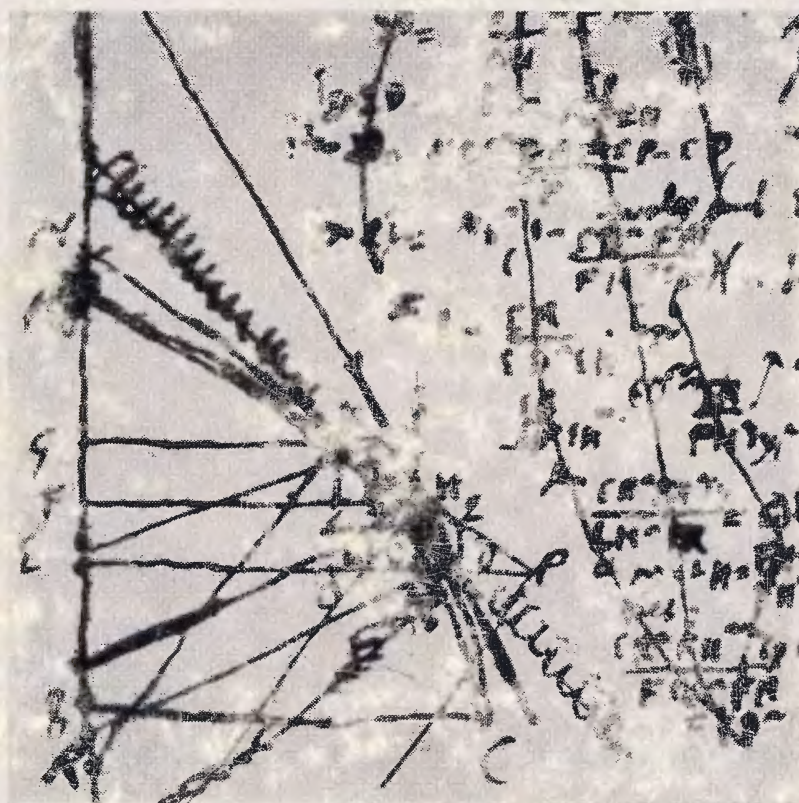


VISIT...

LANZAROTE
Caliente.com

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

2



МАТЕМАТИКА
XVII
СТОЛЕТИЯ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р

ИНСТИТУТ ИСТОРИИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ И ТЕХНИКИ



А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р

ИНСТИТУТ ИСТОРИИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ И ТЕХНИКИ



ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ С ДРЕВНЕЙШИХ ВРЕМЕН ДО НАЧАЛА XIX СТОЛЕТИЯ

В трех томах

Под редакцией А. П. ЮШКЕВИЧА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

Москва 1970

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

Том второй

МАТЕМАТИКА XVII СТОЛЕТИЯ

БИБЛИОТЕКА НМУ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
КОЛЛЕДЖ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
Москва 1970

769

Авторский коллектив тома:

доктор физ.-матем. наук И. Г. БАШМАКОВА

кандидат физ.-матем. наук Л. Е. МАЙСТРОВ

доктор физ.-матем. наук Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД

М. В. ЧИРИКОВ

кандидат физ.-матем. наук О. Б. ШЕЙНИН

доктор физ.-матем. наук А. П. ЮШКЕВИЧ

О Г Л А В Л Е Н И Е

<i>Первая глава. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МАТЕМАТИКИ XVII ВЕКА.</i> (А. П. Юшкевич)	7
Научная революция Нового времени (7). Механическая картина мира и математика (9). Математика XVII века и задачи практики (11). Особенности математики XVII века (16). Организация научной работы (17)	
<i>Вторая глава. АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА</i> (А. П. Юшкевич)	22
Успехи алгебры в трудах Гарриота и Жирара (22). Всеобщая математика Декарта (25). Расширение понятия числа (33). Отрицательные и мнимые [числа (35). Десятичные и непрерывные дроби (38). Алгебра Декарта (40). Алгебра во второй половине XVII века (44). Теорема Ролля (46). Приближенное решение уравнений (47). Проблема решения уравнений в радикалах (54). Определители (52)	
<i>Третья глава. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СРЕДСТВА ВЫЧИСЛЕНИЙ</i> (М. В. Чириков, А. П. Юшкевич)	54
Открытие логарифмов (54). Логарифмы Бюрги (55). Логарифмы Непера (56). Десятичные логарифмы (61). Русские счеты (63). Палочки Непера (65). Логарифмическая линейка (65). Вычислительные машины (66)	
<i>Четвертая глава. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ</i> (И. Г. Башмакова)	70
Возрождение теории чисел (70). Пьер Ферма (70). Простые числа (73). Малая теорема Ферма (74). Квадратичные формы (74). Неопределенные уравнения (75). Решение неопределенных уравнений в рациональных числах (77). Великая теорема Ферма (78). Метод бесконечного спуска (79). Значение проблем Ферма (80)	
<i>Пятая глава. КОМБИНАТОРИКА И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ</i> (Л. Е. Майстров, Б. А. Розенфельд, О. Б. Шейнвиц)	81
Предыстория теории вероятностей (81). Успехи комбинаторики (83). Вероятностные задачи Паскаля и Ферма (86). Теория вероятностей Гюйгенса (88). Статистические исследования (90). «Искусство предположений» Якова Бернулли (92)	
<i>Шестая глава. ГЕОМЕТРИЯ</i> (Б. А. Розенфельд, А. П. Юшкевич)	98
Алгебраические методы в геометрии (98). Аналитическая геометрия (99). Аналитическая геометрия Ферма (101). Аналитическая геометрия Декарта (103). Первые последователи Декарта в геометрии (110). Пространственные координаты (113). «Перечисление кривых третьего порядка» Ньютона (114). Идея бесконечно удаленной точки у Кеплера (117). Возникновение проективной геометрии (121). Теорема Паскаля (124). Принцип непрерывности Лейбница и идея «геометрии положения» (126). Проективное преобразование у Ньютона (127). Теория параллельных линий (128)	
<i>Седьмая глава. ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ</i> (А. П. Юшкевич при участии М. В. Чирикова)	130
Возрождение методов Архимеда (130). Первые обобщения метода исчерпывания (131). Задачи анализа XVII века (135). Новые методы и математическая стро-	

гость (136). Развитие понятия функции (139). Аналитическое представление функций (142). Определение понятия функции (143). Бесконечные последовательности. Джемс Грегори (148). «Квадратура круга» Валлиса (152). Интерполяционные формулы Бригса и Дж. Грегори (155). Логарифмы и бесконечные ряды (158). Разложение $\ln(1+x)$ в степенной ряд (161). Открытия Грегори (165). Инфинитезимальные методы Кеплера (166). Галилей (172). Метод неделимых Кавальери (174). Арифметический вариант метода неделимых Валлиса (181). Аналитические интеграции Ферма (183). Циклоида и синусоида (187). Интеграция Б. Паскаля (189). Спрямления и компланация (191). Задача о касательных (192). Алгебраический метод нормалей Декарта (193). Метод экстремумов и касательных Ферма (196). Кинематический метод касательных (200). Формализация метода Ферма (204). Исаак Барроу (203). Теория вволют Гюйгенса (206). Связь между проблемами квадратур и касательных (210)

Восьмая глава. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ (А. П. Юшкевич). 215

Накауне создания нового исчисления (215). Исаак Ньютон (216). Ньютон и математическая физика (221). Исчисление бесконечно малых Ньютона (227). Разложение в бесконечные ряды (228). Флюенты, флюксии и моменты (233). Метод пределов Ньютона (238). Некоторые приложения флюксионного исчисления (246). Г. В. Лейбниц (247). Учение о всеобщей характеристике (251). Первые инфинитезимальные исследования Лейбница (253). Переход к исчислению бесконечно малых (255). Мемуар Лейбница о «Новом методе» (257). Исчисление бесконечно малых, как алгоритм (261). Школа Лейбница (266). И. Вернулли и его первые ученики (267). Дальнейшая разработка анализа (271). Обыкновенные дифференциальные уравнения (278). Лейбниц и основания исчисления бесконечно малых (281). Первые руководства по математическому анализу (284). Итоги столетия (286)

БИБЛИОГРАФИЯ 288

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ. 295

ПЕРВАЯ ГЛАВА

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МАТЕМАТИКИ XVII ВЕКА

Научная революция Нового времени

Новым временем нередко условно называют XVII и XVIII века.

В Европе, и прежде всего в экономически более развитых государствах, в эту пору укреплялся новый общественный строй — капитализм. Составной частью этого процесса была техническая революция — переход от мануфактурной промышленности к фабричной и целая серия изобретений, среди которых особое место заняло создание паровой машины. Ф. Энгельс писал, что это орудие «в большей мере, чем что-либо другое, будет революционизировать общественные отношения во всем мире» и «сначала доставит буржуазии социальное и политическое господство, а затем вызовет классовую борьбу между буржуазией и пролетариатом»¹. Приход к власти буржуазии происходил в острой идеологической и политической борьбе, и в ряде стран для этого потребовался революционный взрыв. Новое время явилось в Европе эпохой буржуазных революций, растянувшихся более чем на два столетия — от революции в Нидерландах конца XVI в., покончившей с испанским владычеством, до революций во Франции и странах Центральной Европы в середине XIX в.

Новое время было вместе с тем эпохой научной революции. Цепную реакцию великих преобразований во всех областях естествознания начали географические открытия XV—XVI вв., связавшие между собой все обитаемые людьми территории нашей планеты.

Подобно общественным революциям, научная революция Нового времени подготовлялась задолго до первого открытого взрыва. В недрах идеологического «старого режима» накапливались идеи и факты, которым суждено было послужить его низвержению. Старому мировоззрению удары наносили ереси и церковные расколы, гуманизм и Возрождение, философская мысль и научные открытия. Эта борьба укрепляла веру в силу разума и светской науки, независимой от авторитетов натурфилософии и теологии.

Подобно общественным революциям, научная революция Нового времени не была одноактным событием. Первый этап ее продолжался почти около двухсот лет — от Коперника до Ньютона. В течение XVI и XVII вв. она охватила ряд областей знаний — прежде всего астрономию, затем почти одновременно и совместно механику и математику, отчасти оптику.

¹ Ф. Энгельс. Дialeктика природы. М., 1969, стр. 154—155.

Вместе с тем радикальные изменения претерпела концепция мира в целом. Первый удар был нанесен по геоцентрической системе мира, которая обеспечивала за человеком и Землей привилегированное место во Вселенной. Ф. Энгельс ярко характеризовал это событие:

«Революционным актом, которым исследование природы заявило о своей независимости и как бы повторило лютеровское сожжение папской буллы, было издание бессмертного творения, в котором Коперник бросил — хотя и робко и, так сказать, лишь на смертном одре — вызов церковному авторитету в вопросах природы. Отсюда начинает свое летоисчисление освобождение естествознания от теологии, хотя выяснение между ними отдельных взаимных претензий затянулось до наших дней и в иных головах далеко еще не завершилось даже и теперь. Но с этого времени пошло гигантскими шагами также и развитие наук...»¹.

Геоцентрическая система Птолемея царила пятнадцать столетий, гелиоцентрическая система Коперника, обнародованная в 1543 г., утвердилась в науке за три четверти века. Тихо Браге попытался примирить обе системы, сохранив Землю в покое и в центре мира. Однако его наблюдения, обладавшие высокой степенью точности, оказались важнее предложенной им искусственной системы. Они позволили Кеплеру на рубеже XVI и XVII вв. усовершенствовать гелиоцентрическую систему, установив математические законы движения планет по эллиптическим орбитам. Тем самым была разрушена еще одна из догм, унаследованных от древности, — учение о совершенстве кругового движения. Тогда же в натурфилософии Бруно была отвергнута идея об ограниченном Космосе, о принципиальном различии земных и небесных движений и место Космоса заняла Вселенная, в бесконечном и однородном пространстве которой все движения подчиняются одинаковым законам. Немного спустя Галилей как своими астрономическими наблюдениями с помощью только что изобретенной зрительной трубы, так и теоретическими, именно динамическими, рассуждениями закрепил победу коперниканства, которой не мог помешать его одновременный официальный запрет со стороны католической церкви.

Новая динамика Галилея, одним из принципов которой явился принцип инерции, а одним из самых ярких результатов — решение проблемы о траекториях тяжелых брошенных тел (без учета сопротивления), радикально изменила всю ситуацию в системе наук о физическом мире. На первый план выдвинулась проблема построения единой системы динамики, охватывающей также и движения небесных светил, — проблема, принципиально решенная Ньютоном. «Первое место заняло элементарнейшее естествознание — механика земных и небесных тел, а наряду с ней, на службе у нее, открытие и усовершенствование математических методов. Здесь были совершены великие дела»².

Значителен был прогресс и других отраслей механики — статике твердых и жидких тел (Стевин, Галилей, Паскаль), были сделаны первые шаги в области гидродинамики (Торричелли), теории упругости (Гук) и т. д. Из остальных физических наук наибольшие успехи выпали на долю оптики, особенно благодаря открытию зрительной трубы и микроскопа, а затем отражательного телескопа. Преломление и отражение света, а также свойства линз явились предметом исследований Кеплера, Снеллиуса, Декарта, Гримальди и других ученых: Ньютон и Гюйгенс предложили две теории

¹ Ф. Энгельс. Дialeктика природы, стр. 8.

² Там же, стр. 8.

438

света, которым предстояло соревноваться в дальнейшем, — корпускулярную и волновую. В механике газов, исследовании теплоты, акустике, учении о магнетизме плодотворное накопление эмпирического материала. Открытие ряда научных приборов и совершенствование их чрезвычайно расширило возможности и точность научных измерений. Помимо оптических инструментов, следует упомянуть по крайней мере часы с маятником, барометр и термометр.

Механическая картина мира и математика

Одновременно вырабатывалась новая концепция мира. Ученые XVII в. принадлежали к различным философским школам, имели различные религиозные или антирелигиозные убеждения. Но большинство из них сходно трактовало несколько вопросов философии природы, наиболее важных для научного исследования. Физический мир начинают мыслить, как своего рода гигантский механизм, части которого автоматически работают по неизменным законам. Нередко Вселенную сравнивали с часами.

Этот образ — в применении только к античной системе небесных сфер — предложил в первый раз, кажется, Орем, сравнивший при этом бога с мастером, который, изготовив часы, предоставляет им затем ходить самим «в соответствии с установленным порядком». С часами, которые движутся под действием тяжести, сравнивал «небесную машину» Кеплер, надевавшийся объяснить ее действие с помощью магнитной силы. Декарт пошел гораздо далее. Сохраняя сознание только за человеком, он уподобил ходу часов, состоящих только из колес и пружин, даже деятельность животных и их отдельных органов.

Но если мир, по крайней мере физический, представляет собой машину, то средством познания его должна быть механика, а само познание в принципе сводится к установлению законов движения материи. «Пусть мне дадут протяжение и движение, — заявлял Декарт, который отождествлял пространство и материальную субстанцию, — и я переделаю мир». И он продолжал: «... весь мир есть машина, в которой все происходит благодаря фигуре и движению». Качественная физика старых времен с ее многообразием не сводимых друг к другу качеств или форм рушилась. Все воспринимаемые нами качества тел, согласно Декарту, суть лишь результат движений наших нервов, вызываемых действием частиц единой материи, отличающихся между собой фигурой, величиной и движением. Совершенно так же подходил к различению качеств — ощущений вкуса, запаха, звука и т. п. — от объективно присущих внешним телам величины, фигуры, численности и движения Галилей.

Идея «универсальной механики», если можно так выразиться, стала господствующей в науке XVII в., да и позднее. Мы находим соответствующие высказывания у многих крупнейших ученых. Например, Гюйгенс в «Трактате о свете» (1690) писал, что в истинной философии причину всех естественных явлений постигают при «помощи соображений механического характера»¹. Вся физика должна была быть в принципе сведена к меха-

¹ Х. Гюйгенс. Трактат о свете. Перевод Н. Фредерикс под редакцией В. К. Фредерикса. М. — Л., 1935, стр. 12.

нике. А поскольку механика теперь развивалась как наука математическая, то математика приобретала значение универсального метода физического познания — универсального, хотя и не единственного. Галилей выразил в 1623 г. свое понимание роли математики в следующих словах: «Философия написана в величайшей книге, которая всегда открыта перед нашими глазами (я разумею Вселенную), но ее нельзя понять, не научившись сначала понимать ее язык и не изучив буквы, которыми она написана. А написана она на математическом языке, и ее буквы это треугольники, дуги и другие геометрические фигуры, без каковых невозможно понять по-человечески ее слова: без них — тщетное кружение в темном лабиринте»¹. Принципиальная позиция в этом вопросе Декарта была такой же. Она подробно развивается в несколько различных формах в «Правилах для руководства ума» (ок. 1628), «Рассуждении о методе» (1637) и «Началах философии» (1644). Лакоично он выразил ее следующими словами: «Вся моя физика есть лишь геометрия»². Отмечая в 1638 г. некоторые свои расхождения с Галилеем в вопросах физики, Декарт подчеркивал вместе с тем полное согласие с ним в том, что тот старается изучать вопросы посредством математических рассуждений, — другого способа найти истину не существует.

В приведенных словах Галилея и Декарта не получила отражения одна из важнейших, если не самая важная, особенность процесса математизации механики, а за ней физики. Геометрия и ее образы служили естественным средством этой математизации. Однако преобладающее значение в разработке механики и физики приобретает измерение величин, создание количественных понятий и поиски законов, выражающихся формулами алгебры и анализа.

Эта особенность развития науки была обусловлена всей практической деятельностью того времени и возникновением актуальных задач, требовавших ответа со все возрастающей степенью точности. Такие задачи появлялись в промышленности, строительной, транспортной технике, в быстро прогрессирувавшем артиллерийском деле, в навигации, в связи с изобретением и совершенствованием различных приборов и инструментов и т. д. Назовем несколько таких вопросов, правильная постановка и решение которых требовали математического исследования, завершающегося числовым расчетом. Это цикл проблем гидротехники (давление воды на плотины и плузы; работа насосов; движение воды в каналах), затем кораблестроения и навигации (устойчивость плавающих тел; движение твердого тела в жидкости; черчение географических карт; определение долготы корабля в открытом море), артиллерии (прежде всего движение брошенного тела в пустоте и в сопротивляющейся среде), оптики (свойства линз и их систем), точного приборостроения (часы и колебания маятника). Решение этих и других проблем шло, так сказать, путями последовательных приближений, и во многих случаях первый практически удовлетворительный ответ был найден не сразу; от этого задачи отнюдь не утрачивали интереса. Вместе с тем многие задачи ставились вновь и вновь во все усложняющейся постановке, более полно учитывающей условия, имеющиеся в действительности. История гидравлики, картографии, баллистики дает тому множество примеров. Мы не будем здесь перечислять соответственные исследования по математике, которые, в свою очередь, влекли за собой постановку новых

¹ G. Galilei. Le Opere, v. VI. Firenze, 1891, p. 232.

² R. Descartes. Oeuvres, v. II. Paris, 1897, p. 268.

математических задач, — это завело бы слишком далеко. Действие этих практических задач сочеталось с собственными потребностями главных областей естествознания, а обобщающая философская мысль с полной силой стимулировала прогресс количественных методов изучения природы.

Таким образом, в механико-математической картине мира выдвигаются на первое место законы, представляющие собой аналитически выраженные функциональные зависимости между совместно изменяющимися величинами. В одних случаях законы подобного рода устанавливались эмпирически и лишь позднее включались в некоторую общую теорию, другие сразу выводились теоретически, т. е. математически. Там, где не доставало аналитических выражений, — фактический запас изученных функций был на первых порах невелик, — закон выражался геометрически; сам вопрос нередко ставился в геометрической форме, например: требовалось найти траекторию движущегося тела или форму подвешенной нити и т. п. Вспомним законы движения планет Кеплера, открытую им же зависимость интенсивности света от расстояния до его источника, закон преломления света Снелли — Декарта, законы Галилея о движении тяжелых тел в пустоте, закон Торричелли о скорости истечения жидкости из отверстия в стенке сосуда, закон Бойля — Мариотта, закон Гука о растяжении пружины... Полное перечисление такого типа законов заняло бы много страниц, даже в границах XVII в.

Несколько позднее существенную и все возрастающую роль, правда в качестве вспомогательного средства исследования, начинают играть другого типа законы природы — дифференциальные законы, к которым приводили задачи механики, оптики, геометрии. Но от дифференциального уравнения, описывающего тот или иной процесс или явление, всегда, разумеется, требовалось перейти к конечному уравнению — его интегралу.

Таковы были общие черты научной революции Нового времени.

Математика XVII века и задачи практики

Одной из непосредственных причин научного прогресса в Новое время явилось радикальное изменение в отношениях между наукой и техникой. Университетские ученые Средних веков не нашли чего-либо интересного даже в таких изобретениях, как часы, линзы и очки, огнестрельное оружие. Начиная с эпохи Возрождения, ученые проявляют возрастающее внимание к практическим, особенно техническим, задачам; вместе с тем государство начинает активно привлекать ученых к исследованию таких задач. Меняется социальная функция науки и ученого, — это в полной мере справедливо и для математиков, причем под математикой здесь следует понимать широкую совокупность теоретических и прикладных дисциплин, которую обозначали этим словом в то время. Собственно «чистые» математики в нашем теперешнем смысле тогда встречались довольно редко. Многие крупные ученые были одновременно инженерами и конструкторами либо выступали в качестве консультантов, помогавших решению технических вопросов. Стевин занимался гидротехникой, Тарталья — баллистикой, Кардано — теорией механизмов; Кеплер, Галилей, Гюйгенс, Ньютон строили зрительные трубы; тот же Гюйгенс, по замечанию Зоммерфельда, был гениальнейшим часовым мастером всех времен; Паскаль и Лейбниц с увлечением работали над изготовлением первых арифмометров. В этой своей

деятельности ученые непосредственно соприкасались с мастерами и ремесленниками. От союза между наукой и техникой ожидали величайших благодеяний для человечества лучшие умы, как Фр. Бекон, Декарт и другие.

Еще чаще, чем инженером, математик Нового времени бывал одновременно математиком, астрономом, механиком, физиком и даже философом, хотя какое-нибудь направление его занятий являлось преобладающим. Все это влекло за собой особенно глубокое и органическое слияние физической, математической, философской, а иногда конструкторской мысли. Яркими примерами тому служат, например, механика и метод флюксий Ньютона, учение о всеобщей характеристике и исчисление бесконечно малых Лейбница или исследование Гюйгенса о часах с маятником, в котором решение важнейшей для навигации и астрономии технической задачи осуществляется на основе взаимодействия разработанных для нее понятий и методов математики и механики — методов, которые автор тут же развивает далее, чем требовалось бы только для решения самой задачи.

Предисловие Гюйгенса к сочинению, в котором он подробно изложил как конструкцию, так и теорию своего изобретения, ярко рисует это взаимодействие в творчестве одного и того же ученого. Отметив, что время колебания простого кругового маятника зависит от размаха, поэтому он не является равномерным измерителем времени, Гюйгенс в 1673 г. писал:

«Однако при помощи геометрии я нашел новый, до сих пор неизвестный, способ подвешивания маятников. Я исследовал кривизну некоторой кривой, которая удивительным образом подходит для обеспечения равенства времени качания маятника. После того, как я заставил маятник часов колебаться по этой кривой, ход часов стал чрезвычайно правильным и надежным, как показали испытания на суше и на море. Великая польза этих часов для астрономии и мореплавания может считаться установленной. Эта кривая — та, которую описывает в воздухе гвоздь, вбитый в обод колеса, при качении колеса. Математики нашего времени называют ее циклоидой...

Для проведения... доказательств потребовалось укрепить и, где нужно, дополнить учение великого Галилея о падении тел. Наиболее желательным плодом, как бы величайшей вершиной этого учения, и является открытое мною свойство циклоиды.

Для применения моего изобретения к маятникам мне необходимо было установить новую теорию, а именно, теорию образования новых линий при посредстве развертывания кривых линий. Здесь я столкнулся с задачей сравнения длины кривых и прямых линий. Я изучил этот вопрос несколько далее, чем нужно было для моей цели, так как теория показала мне изысканную и новую.

Я показываю полезность применения в часах сложного маятника. Для изучения его природы я должен был произвести исследование о центре качания... Я здесь доказал ряд теорем относительно линий, площадей и тел, которые заслуживают, как мне кажется, внимания. Но всему этому я предпосылаю описание механического устройства часов и применение маятника в форме, оказавшейся наиболее удобной для астрономических целей»¹.

¹ Х. Гюйгенс. Три мемуара по механике. Перевод К. К. Баумгарта. Л., 1951, стр. 9—40.

Действительно, маятниковые часы Гюйгенса вскоре после их изобретения получили применение в обсерваториях Парижа, Копенгагена и Гринвича, однако они не смогли быть использованы на кораблях. Проблема определения долготы в открытом море при помощи часов получила удовлетворительное решение почти через столетие, когда Дж. Гаррисон изготовил первый достаточно точный пружинный хронометр.

Можно привести множество примеров, когда первый импульс сообщался математическому творчеству извне или когда задача, возникавшая ранее, вроде задачи проведения касательной к кривой, приобретала особую важность для физики, обобщалась и стимулировала открытие нового математического метода. Так, Декарт пришел к задаче о касательных, или, что то же, о нормальных, в поисках линз, имеющих форму поверхности вращения и определенным образом преломляющих лучи света, в согласии с законом Снеллиа — Декарта. Найдя решение в виде овалов, носящих теперь его имя, — это было сделано, вероятно, с помощью бесконечно малых — Декарт затем доказал требуемое свойство овалов, применив придуманный им общий алгебраический метод определения нормалей. Задачу проведения нормали он считал наиболее полезной и общей в геометрии кривых линий. Та же задача о касательных, естественно, вставала при изучении механического движения, и другие, неалгебраические способы ее решения явились одним из источников дифференциального исчисления.

Прямые связи математики с задачами практической жизни имели для развития этой науки меньшее значение, чем связи через естествознание, особенно механику; остальные отделы физики играли в то время гораздо меньшую роль, так же как картография и области знания, пограничные между математикой и общественными науками, вроде страхования, статистики народонаселения и т. п. Механика земных и небесных движений ставила огромное количество вопросов: от падения тяжелого тела на Землю до задачи трех тел, от проблемы устойчивости плавающих тел до теории приливов и отливов, от движения тел по наклонной плоскости до поисков кривых скорейшего спуска — брахистохрон в сопротивляющейся среде. В центр внимания тем самым ставилось изучение зависимостей между движущими силами, ускорениями, скоростями, траекториями движения и т. д. В наиболее общем математическом выражении все это приводилось к исследованию функций методами исчисления бесконечно малых, — именно, к двум проблемам взаимно обратного характера: установлению дифференциальных свойств функций по данным интегральным свойствам и интегральным свойствам по данным дифференциальным. Как известно, после примерно полувековой разработки рядом ученых частных приемов в 60-е и 70-е годы XVII в. Ньютон и Лейбниц создали две равносильные системы общего анализа бесконечно малых.

Конечно, математика XVII в. развивалась не только при решении практических задач или задач физических наук, или же во взаимодействии с последними и с философией. Математика и в XVII в., как и в другие эпохи, не нуждалась в постоянном обращении «за заказами»: в ней происходили и внутреннее саморазвитие, наиболее быстрое и успешное в тех отделах, которые обещали принести богатые плоды в науках о природе.

В этой связи следует высоко оценить роль античного наследия, значительно возросшую в эпоху Возрождения и примыкающее к ней время. Мы уже отмечали в I томе некоторые печатные издания греческих классиков. «Начала» Евклида, сначала выпущенные в латинском переводе с арабского, сделанном в XIII в. Дж. Кампано (Venezia, 1482), вскоре появились и в пе-

реводе с греческого, выполненном около 1473 г. Бартоломео Цамберти (Venezia, 1505) и затем в греческом издании (Basileae, 1533), подготовленном гуманистом Симоном Гринеусом старшим (1493—1541), — последнему мы обязаны и первым греческим изданием «Альмагеста» Птолемея (Basileae, 1538), латинские изложения и переводы которого были также напечатаны ранее (Venezia; 1496, 1515, 1528). Гринеус опирался на две рукописи сравнительно более поздней редакции «Начал», и потребовалась долгая и кропотливая работа поколений исследователей, прежде чем И. Л. Гейберг (1854—1928) выпустил свое образцовое критическое издание, наиболее близкое, по всей вероятности, к тексту самого Евклида (Leipzig, 1883—1886). Тем временем в течение XVI—XIX вв. «Начала» неоднократно издавались как на обоих древних языках, так и на новых, полностью и в различных переработках и изложениях.

Титульный лист первого греко-латинского издания сочинения
Архимеда (Базель, 1544)

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

ΤΟΥ ΣΥΡΑΚΟΥΣΙΟΥ, ΤΑ ΜΕΓΡΑ

αὐτοῦ (αὐτῶν, ἡ παλαιά).

ARCHIMEDIS SYRACVSANI
PHILOSOPHI AC GEOMETRAE EX-

cellentissimi Opera, quae quidem extant, omnia, multis iam saeculis deli-
derata, atq. à quàm paucissimis haëtenus uisa, nuncq.
primum & Graecè & Latinè in lu-
cem edita.

Quorum Catalogum uerfa pagina reperies.

Adiecta quoq. sunt

EVTOCII ASCALONITAE

IN EOSDEM ARCHIMEDIS LI-
bros Commentaria, item Graecè & Latinè,
nunquam antea excusa.

*Cum Caes. Maieſt. gratia & priuilegio
ad quinquennium.*

BASILEAE.

Ioannes Heruagius excudit fecit.

Αν. Μ. Δ. Χ. Ι. Ι. Ι. Ι.

5861

Первые латинские издания отдельных работ Архимеда — «Измерения круга», «Квадратуры параболы», затем еще трактатов по статике и гидростатике — появились, как и в случае «Начал», в Италии и также в переводе XIII в., сделанном В. фон Мербеке (Venezia, 1503 и 1543). Вслед затем Томас Гешауф (лат. Венаториус, 1490—1551) издал греческий текст всех известных тогда сочинений Архимеда с комментарием Евтокия вместе с латинским переводом Джакомо из Кремоны (ум. ок. 1452), отредактированным Региомонтаном. Это важное издание, подобно первому греческому тексту «Начал», вышло в Швейцарии (Basileae, 1544). О чрезвычайно возросшем интересе к Архимеду свидетельствуют еще два перевода того времени: тщательно подготовленное и комментированное издание его математических трудов Ф. Коммандино (Venezia, 1558), дополненное затем мемуаром «О плавающих телах» (Venezia, 1565), и столь же выдающееся по своим достоинствам издание всех его сочинений, принадлежащее Ф. Мавролико. Этот последний труд практически увидел свет лишь через сто лет после смерти Мавролико (Palermo, 1670 и 1685); тираж издания 1570 г., за исключением нескольких экземпляров, погиб при перевозке от кораблекрушения.

Современное каноническое издание трудов Архимеда подготовил уже упомянутый И. Л. Гейберг (2-е изд. Leipzig, 1910—1915); то же относится, между прочим, к Аполлонию (Leipzig, 1890—1893). Книги I—IV «Конических сечений» Аполлония, сначала изданные в неудовлетворительном латинском переводе (Venezia, 1537), были вновь переведены теми же Коммандино (Bononiae, 1566) и Мавролико (Messina, 1654): V—VII книги перевели на латынь с арабского Джованни Альфонсо Борелли (1608—1679) в сотрудничестве с ориенталистом из Сирии Абрамом Эккеленсис (Florentiae, 1661); наконец, образцовое издание «Конических сечений» с греческим текстом I—IV книг, латинским переводом V—VII книг и реконструкцией VIII книги выпустил Э. Галлей (Oxoniae, 1710). Заслуживает упоминания, что восстановить содержание V—VII книг, в XVI в. еще неизвестных, попытался Мавролико; не достигнув, как позднее выяснилось, цели, он тем не менее получил некоторые самостоятельные результаты в столь новом для тогдашних европейских математиков учении о конических сечениях.

«Арифметика» Диофанта увидела свет в латинском переводе Вильгельма Гольцмана-Ксиландера (1532—1576) несколько позднее (Basileae, 1575). Впрочем, еще до того большая часть задач Диофанта (147 из 197) была включена, нередко с теми же числовыми данными, в «Алгебру» Р. Бомбелли (1572), а затем многие десятки задач были приведены в сочинениях С. Стевина и Ф. Виета. Впоследствии основное значение приобрело греко-латинское издание «Арифметики», подготовленное К. Баше де Мезириаком (Paris, 1624, стр. 70).

Назовем еще латинский перевод «Собрания» Паппа, принадлежащий Коммандино (Pesaro, 1588); сохранившийся греческий текст был опубликован полностью лишь три века спустя.

В трудах древних греков математики Нового времени смогли почерпнуть многие идеи, ставшие отправным пунктом дальнейшего творчества. Не следует забывать, однако, что античные идеи могли обрести теперь новую жизнь именно потому, что оказались созвучными требованиям Нового времени; в других условиях, скажем в Византии, великие творения древних классиков ничего не говорили ни уму, ни сердцу своих пассивных читателей.

К концу XVI в. математика складывалась из арифметики и алгебры, геометрии и тригонометрии. Это была по преимуществу математика постоянных величин, хотя в алгебраическом исчислении появились уже переменные параметры. Идея непрерывной функции, зародившаяся в средневековой теории форм, не получила еще развития, так же как идея предельного перехода, фактически содержавшаяся в античном методе исчерпывания.

В XVII в. математические исследования гигантски расширяются и возникает несколько новых наук; аналитическая геометрия, проективная геометрия, теория вероятностей, а главное, исчисление бесконечно малых, включавшее ростки новых дисциплин — теории бесконечных рядов, интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений и вариационного исчисления, а также получившее первые приложения к задачам дифференциальной геометрии. Вместе с тем продолжались работы по алгебре и тригонометрии, были созданы разнообразные методы приближенных вычислений, решены отдельные трудные задачи теории чисел и т. д.

За один этот век математика обогатилась большим числом новых понятий и методов, чем за предыдущие пятнадцать. Однако значение сделанных открытий было для науки той эпохи далеко не равноценным. Теория чисел находилась еще в стадии решения частных проблем и привлекала немногих исследователей; среди них, правда, был Ферма, но только после работ Эйлера и Лагранжа теория чисел стала подлинной наукой. Работы Дезарга по проективной геометрии не нашли в XVII в. достойного продолжения, если не считать превосходных изысканий Б. Паскаля; затем они были прочно забыты. Точно так же не привлекло в то время последователей употребление проективных методов Ньютоном. В результате проективная геометрия возродилась только в первой половине XIX в. В теории вероятностей до Я. Бернулли также сделаны были лишь первые шаги, а открытый им закон больших чисел был опубликован уже в начале следующего столетия.

Теперь мы видим первые ростки современной машинной математики в арифмометрах XVII в., к которым можно было бы присоединить еще логарифмическую линейку; однако арифмометры, пригодные для практического употребления, появились только во второй половине XIX в. Даже в области аналитической геометрии, открытие которой сразу приобрело фундаментальное значение, существенный прогресс начался лишь через сто лет после основополагающих работ Декарта и Ферма. Главные усилия лучших умов были сосредоточены на разработке инфинитезимальных методов, и можно сказать, что XVII, да и XVIII в. составили в истории математики эпоху почти безраздельного господства исчисления бесконечно малых.

Создание аналитической геометрии и анализа произвело в математике подлинную революцию. Оно поставило в центр исследований новые объекты и методы, которые лишь в самом перазвитом виде существовали в прежней математике. Отныне математика не ограничивается уже изучением постоянных величин и чисел и во все возрастающей мере переходит к исследованию переменных величин и функций, как аналогов механического движения и любого количественного изменения вообще, а для этого — к рассмотрению бесконечно малых и бесконечно больших величин, применение которых к решению конкретных вопросов почти прекратилось со времени Архимеда. Первоначально создаются частные приемы решения изолирован-

ных задач, основанные на различных геометрических, механических, алгебраических соображениях, но уже в 60—70-е годы XVIII в. обнаруживается, что все эти задачи приводятся к двум типам взаимнообратных проблем, а все частные приемы — к аналитическим операциям над объектами аналитической же природы, как дифференциалы, интегралы, ряды и некоторые другие. Арифметика и геометрия бесконечного преобразуются в его алгебру: с помощью особой символики по примеру алгебраического исчисления создается алгоритм исчисления бесконечно малых.

Построение нового анализа функций как системы алгоритмов оказалось главной целью и главным достижением новой математики.

Ф. Энгельс характеризовал революцию в математике XVII в. следующим образом: «Поворотным пунктом в математике была декартова *переменная величина*. Благодаря этому в математику вошли *движение* и тем самым *диалектика* и благодаря этому же стало *немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление*»¹.

Понятие функции как аналитического выражения получило явное применение в «Геометрии» Декарта, вышедшей в 1637 г. Алгоритм дифференциального исчисления был впервые изложен в печати в статье Лейбница «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которых не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления», появившейся в 1684 г. Среди многих знаменательных дат в истории математики Нового времени эти две, быть может, особенно памятные.

Организация научной работы

Одной из сторон научной революции явились новые формы организации исследований, позволившие гораздо шире, чем прежде, привлечь ученых к решению различных практических задач и отвечавшие вместе с тем потребности самих ученых в устном и письменном общении. Во многих случаях частная инициатива опережала мероприятия государственной власти, которая одна могла поставить на прочную материальную и финансовую опору деятельность сравнительно крупных научных коллективов.

Первое общество естествоиспытателей, Академия секретов природы (слово Академия должно было напоминать о научной школе — Академии, основанной Платоном), основанное в 1560 г. в Неаполе, оказалось недолговечным. В 1603 г. была создана Академия рысей — *Accademia dei lincei* (рысь должна была символизировать зоркость членов Академии) в Риме, существующая и поныне. Одним из членов Академии рысей был Галилей. Во Флоренции в 1657—1667 гг. действовала Академия опыта, закрытая из-за интриг католического духовенства.

Особое значение в XVII в. приобретает взаимный обмен научной информацией при помощи переписки, достигшей в то время и затем в XVIII в. колоссальных размеров. Для примера укажем, что переписка, по большей части научная, Лейбница достигает поистине астрономического числа — примерно 15 000 писем. От корреспонденции Эйлера сохранилось около 3000 писем, их было не менее 4000. Во Франции, именно в Париже, функции нынешних институтов научной информации выполнял многие годы М. Мерсенн, ведший оживленнейшую переписку с Декартом, Ферма,

¹ Ф. Энгельс. Диалектика природы, стр. 224.

Галилеем Гоббсом и другими учеными, в Англии, в Лондоне, — Г. Ольденбург, через которого, между прочим, шла переписка между Ньютоном и Лейбницем, и Д. Коллинс, в Германии — юрпбургский профессор К. Шотт.

Если итальянские академии создавались под покровительством государей и вельмож, то во Франции и Англии они представляли собой на первых порах частные кружки, члены которых собирались для обсуждения научных проблем и новинок. Подобного рода кружки стали появляться во Франции в 20-е годы XVII в.; в 1635 г. один из них, известный под именем *Academia Parisiensis*, стал основой, на которой благодаря поддержке министра Кольбера в 1666 г. была организована Королевская Академия наук в Париже. Вначале Парижская академия состояла из двух секций — математики и физики — и ее первым президентом был голландец Гюйгенс. В Англии научные кружки появляются после конца гражданской войны в 1645 г.; незадолго перед тем Фр. Бекон в своей утопии «Новая Атлантида» (опубл. 1627) яркими красками описал возможную пользу «Дома Соломона» — центра научных изобретений и экспериментов. Официально Королевское общество в Лондоне оформилось в 1662 г., среди его основателей были Бойль, Гук, Рен, Валлис, первым президентом был высокопоставленный любитель математики Броункер, а секретарем только что упомянутый Ольденбург. Впоследствии долгие годы Королевское общество возглавлял Ньютон. В Пруссии Берлинское общество (академия) наук было основано в 1700 г. по предложению Лейбница, его первого президента. В России Петербургская академия наук была открыта в 1725 г., через несколько месяцев после смерти ее основателя — Петра I. Формы существования и деятельности академий были различными. В большинстве стран это были государственные учреждения, обязанные выполнять различные поручения правительства, и академики состояли на жалованьи, но Королевское общество в Лондоне оплачивало свои скромные расходы (на секретаря, переписку и некоторые другие) из взносов его членов. В уставах академий специально подчеркивалось, что они должны содействовать прогрессу как естественных наук, так и промышленности и техники. Фактически собственно научная работа академий была более эффективной, чем непосредственно техническая, но в конце концов исследование крупных теоретических проблем всегда приносило неоценимую пользу и в области прикладных наук.

Помимо академий (и нередко в их составе), государство субсидировало организацию библиотек, физических кабинетов, обсерваторий, ботанических садов и различных вспомогательных учреждений, а также издательскую деятельность академий. Многие важные научные мероприятия вообще были не под силу отдельным ученым; это особенно относится к дальним морским и сухопутным экспедициям, имевшим равное значение и для теории и для практики.

Для быстрого распространения научной информации особое значение приобрело появление научной периодики. В 1665 г. стали выходить «*Philosophical Transactions*» — «Философские труды» Лондонского Королевского общества и парижский «*Journal des Sçavans*» — «Журнал ученых», в 1682 г. в Лейпциге «*Acta Eruditorum*» — «Труды ученых». Этот последний журнал, издававшийся на латинском языке, вплоть до начала XIX в. служившем международным языком ученых, несколько десятков лет играл выдающуюся роль в распространении новых математических идей, деятельным сотрудником его был Лейбниц. Ежегодные «Записки» — «*Mémoires*» на французском языке стала публиковать с 1699 г. Парижская



Парижские академики за работой в Библиотеке (сверху)
и в Палате опытов (внизу).
По гравюре 1676 г., хранящейся в Кабинете эстампов
Национальной библиотеки в Париже

академия наук, с 1728 г. начали выходить на латыни «Commentarii» — «Записки» Академии наук в Петербурге; другие академии также обзаводились печатными органами. Однако сравнительно редкий выход академических журналов и их немногочисленность не позволяли им еще стать сильным конкурентом личной переписки ученых. В перечисленных периодических изданиях печатались статьи по различным наукам; иногда в них выделялся математический отдел. Специальные математические журналы появились только в XIX в.

Научные общества и академии стали главными центрами развития новой науки и в этом отношении нередко противостояли университетам, многие из которых сохраняли приверженность рутинной средневековой науке. Ведущая роль академий особенно проявилась в XVIII в., но отставание университетов от требований эпохи было совершенно явным и в XVII в., хотя в них и работали некоторые выдающиеся ученые. В этой связи интересно отметить еще одну характерную черту научной жизни XVI—XVII вв. — появление большого числа ученых-любителей, свидетельствовавшее о

Первая страница первого номера «Философских трудов» Лондонского Королевского общества, вышедшего 6 марта 1665 г.

(1)

Numb. 1.

PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS.

Munday, March 6. 1665.

The Contents.

An Introduction to this Tract. An Account of the Improvement of Optick Glasses at Rome. Of the Observation made in England, of a Spot in one of the Belts of the Planet Jupiter. Of the motion of the late Comet predicted. The Heads of many New Observations and Experiments, in order to an Experimental History of Colds, together with some Thermometrical Discourses and Experiments. A Relation of a very odd Monstrous Calf. Of a peculiar Lead-Ore in Germany, very useful for Effays. Of an Hungarian Bolus, of the same effect with the Bolus Armenus. Of the New American Whale fishing about the Bermudas. A Narrative concerning the success of the Pendulum-watches at Sea for the Longitudes; and the Grant of a Patent thereupon. A Catalogue of the Philosophical Books published by Monsieur de Fermat, Counsellor at Tholouse, lately dead.

The Introduction.

 Hereas there is nothing more necessary for promoting the improvement of Philosophical Matters, than the communicating to such, as apply their Studies and Endeavours that way, such things as are discovered or put in practice by others: it is therefore thought fit to employ the *Prefis*, as the most proper way to gratifie those, whose engagement in such Studies, and delight in the advancement of Learning and profitable Discoveries, doth entitle them to the knowledge of what this Kingdom, or ether parts of the World, do, from time to time, afford, as well

A

of

резко возросшем интересе к науке в образованной части общества. Если, скажем (ограничиваясь математикой), Кеплер и Галилей то или иное время состояли универс. етскими профессорами и профессорами же были Кавальери, Роберваль, Валлис, Барроу, Ньютон и братья Я. и И. Бернулли, то Стевин являлся военным инженером, Виет, Ферма и Дебон были юристами, Непер, Декарт, Б. Паскаль и Лопиталь — частными лицами, Дезарг и Рен — архитекторами, Гудде и де Витт — государственными деятелями, а Лейбниц большую часть своей жизни занимал должность библиотекаря и историографа герцога ганноверского. Университетских и академических должностей далеко не хватило бы для названных и других любителей математики, вклад которых в развитие науки был не меньшим, чем дипломированных профессионалов.

Развитие математики, как и всей науки в XVII в., происходило неравномерно в различных странах Европы. В Италии, занимавшей в XV—XVI вв. одноизведущих мест в культурной жизни Европы, в первой половине XVII в. работали Галилей и такие выдающиеся его ученики, как Кавальери и Торричелли, но разгул клерикальной реакции, казнившей в 1600 г. одного из наиболее замечательных итальянских мыслителей — Джордано Бруно и преследовавшей Галилея, привел к резкому спаду научных исследований в этой стране. На развитии науки в Германии, также бывшей в XVI в. одним из форпостов европейской науки, отрицательно сказывались ее феодальная разобщенность и изнурительная 30-летняя война. К рассматриваемой эпохе относится деятельность крупнейших немецких ученых Кеплера и Лейбница, но они не нашли в то время достойных преемников на родине. Лучшими учениками Лейбница явились швейцарцы Яков и Иоганн Бернулли. На первый план в XVII в. выдвигаются наиболее передовые в социальном и экономическом отношении Англия, Франция и Голландия. В Англии на протяжении XVII в. работали Непер, Валлис, Барроу, Дж. Грегори, Ньютон; во Франции — Декарт, Ферма, Дезарг, Паскаль; в Голландии — Стевин, Жирар, Гюйгенс. Мы называем здесь только наиболее крупных математиков. Благодаря усилившимся контактам наука в этих странах принимает отчетливо выраженный международный характер. Наряду с этим наблюдаются и некоторые национальные особенности, обусловленные специфическими условиями в различных странах. Так, во Франции на рубеже XVII и XVIII вв. сторонники ортодоксального картезианства оказывали противодействие проникновению идей ньютоновой механики и математического анализа, который не имел успеха и среди преемников Галилея и Кавальери. Так, далее, с начала XVIII в. англичане не пользовались понятиями и символикой дифференциального и интегрального исчисления Лейбница, а на континенте Европы чуждались понятий и символики метода флюксий Ньютона.

В некоторых странах Центральной и Восточной Европы прогресс науки сильно замедлился. Сказанное относится к Чехии, полностью утратившей национальную и государственную независимость после сражения с войсками Габсбургов при Белой горе (1620 г.), и к Польше, ослабляемой постоянными внутренними раздорами и внешними войнами. Россия выступила в качестве великой математической державы после организации в 1725 г. Петербургской академии наук.

Обратимся теперь к истории отдельных математических дисциплин.

ВТОРАЯ ГЛАВА

АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА

Успехи алгебры в трудах Гарриота и Жирана

После Фр. Виета, который создал первое общее буквенное исчисление для алгебры, основанное на геометрии, крупнейшим преобразователем этой науки явился другой французский ученый — Р. Декарт, с именем которого мы уже встречались неоднократно. Правда, Декарт не был первым по времени алгебраистом XVII в. Среди его предшественников трое по крайней мере внесли в алгебру ценный вклад.

Первым из них был воспитанник Оксфордского университета Томас Гарриот (1560—1621), составитель ценного описания и карты исследованной им части Северной Америки, ныне именуемой Северной Каролиной (1586), карты Луны, которую он наблюдал через зрительную трубу в одно время с Галилеем, и, наконец, труда «Применение аналитического искусства к решению алгебраических уравнений» (*Artis analyticae praxis ad aequationes algebraicas resolvendas*), изданного через десять лет после смерти автора в Лондоне в 1631 г. В этом сочинении, во многом примыкающем к алгебраическим трудам Виета (см. т. I, стр. 307 и сл.), Гарриот поставил себе задачей изложить «аналитическое искусство» своего предшественника легче и проще для понимания и применения. Этого он во многом достиг, усовершенствовав символику. Вместо прописных букв для неизвестных и известных величин он применил строчные, а их целые положительные степени стал обозначать, как иногда поступал ранее Штифель, записывая соответствующее число раз подряд основание; Виет, как мы знаем, писал рядом с буквой полное или сокращенное наименование степени или размерности величины. Так как Гарриот пользовался к тому же знаком равенства Рекорда, его запись довольно похожа на современную и, например, уравнение (один из корней которого есть $2b$)

$$aaa - 3.baa + 3.bba = + 2.bbb$$

соответствует нашему

$$x^3 - 3bx^2 + 3b^2x = 2b^3.$$

Точка здесь служит для отделения числового коэффициента, а не знаком умножения, как это предложил Лейбниц в конце XVII в. Между прочим, подобного рода запись, в которой свободный член стоит один в какой-либо части уравнения, Гарриот называл *aequatio canonica*, — здесь впервые по-

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 52 \text{ ————— } - 3. a + a a a \dots a \text{ ————— } \\
 \text{1. ————— } \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \sqrt{3.} 26 + \sqrt{675} + \sqrt{3.} 26 - \sqrt{675}. \\ 2. + \sqrt{3.} \dots + \dots 2 - \sqrt{3.} \end{array} \right\}} \\
 \text{2.}
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 270 \text{ ————— } + 9 a + a a a \dots a \text{ ————— } 6. \\
 \text{4. ————— } \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \sqrt{3.} \sqrt{18252} + 135 - \sqrt{3.} \sqrt{18252} - 135. \\ \sqrt{12} + 3 \dots - \dots \sqrt{12} - 3. \end{array} \right\}} \\
 \text{6.}
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 40 \text{ ————— } - 6. a + a a a \dots a \text{ ————— } 4. \\
 \text{a ————— } \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \sqrt{3.} 20 + \sqrt{392} + \sqrt{3.} 20 - \sqrt{292}. \\ 2. + \sqrt{2.} \dots + \dots 2 - \sqrt{2.} \end{array} \right\}}
 \end{array}
 \end{array}$$

Запись кубических уравнений с числовыми коэффициентами и выражение их корней в «Применении аналитического искусства» Т. Гарриота (Лондон, 1631, стр. 101)

является выражение «каноническое уравнение». В начале своего сочинения Гарриот нередко собирает все члены на одной стороне уравнения, вроде

$$aaaa + baaa - cdfa - bcdf = 0,$$

однако он, видимо, не оценил всего значения такой формы, ставшей вскоре канонической, — этим мы обязаны Декарту. Новыми полезными знаками Гарриота явились $>$ и $<$ для отношений «больше» и «меньше»; он их употребил при рассмотрении вопроса о наличии у кубического уравнения положительных корней. Вывод соответствующих условий, предложенный Гарриотом, заслужил впоследствии высокую оценку Ж. Л. Лагранжа, но по существу эти условия имелись еще у Виета.

В упомянутом выводе, как и во многих других случаях, Гарриот применял образование уравнений путем перемножения линейных двучленов вида $a - b$, $a - c$, $a + d$ и т. д. — прием, несомненно, известный Виету, хотя и не упоминаемый им явно в дошедших до нас сочинениях. Применяя множители вида $a + d$, Гарриот по сути дела вводил отрицательные корни, но вслед за Виетом он учитывал лишь корни положительные. Такое ограничение не позволяло единообразно и в общем виде формулировать зависимости между корнями и коэффициентами уравнения, правила знаков и т. д. В частности, именно это обстоятельство удерживало Виета и Гарриота от явной формулировки в том или ином виде основной теоремы алгебры, хотя они знали, что уравнение n -й степени, составленное умножением n линейных множителей вида $x - x_k$, где $x_k > 0$, имеет n корней.

Естественно, что основная теорема алгебры была прежде всего высказана в форме утверждения, что уравнение n -й степени может иметь самое большое n решений. Такое предложение впервые встречается в сочинении немецкого математика Петра Роте (ум. 1617) со следующим витиеватым

заглавием: «Философская арифметика или прекрасное новое основательное чрезвычайно искусное исчисление косс или алгебра» (*Arithmetica philosophica oder schöne neue wolgegründete Überauskünstliche Rechnung der Coss oder Algebra*, Nürnberg, 1608).

Сначала Роте указывает, что у «кубикосических» уравнений имеется большей частью (auf's meiste) тройное значение корня, у «цензицензикосических», т. е. уравнений четвертой степени, — значений корня четыре, а далее он обобщает это свойство: «... и так далее без конца у всех последующих коссов большей частью находится столько значений корня, сколько указывает в силу косической прогрессии высшее количество данного косического уравнения..., но вовсе не более»¹. Книга Роте не приобрела широкой известности, и мы не знаем, была ли она в руках двух других математиков, вновь высказавших это предложение в несколько иных, хотя и сходных, формулировках.

Вторично теорема в числе корней алгебраического уравнения произвольной степени появляется у Альбера Жирара (1595—1632), уроженца Лотарингии и воспитанника Лейденского университета. В своем кратком «Новом открытии в алгебре» (*Invention nouvelle en l'algèbre*, Amsterdam, 1629), содержащем ценные результаты и в тригонометрии, в частности теорему о пропорциональности площади сферического треугольника сферическому избытку², Жирар принимает и использует как отрицательные, так и мнимые корни уравнений. Первые он именует «решениями с минусом» (*solutions par moins*) и геометрически истолковывает с помощью «движения вспять» (*en retrogradant*). В пользовании термином «решения с минусом» Жирар последовал за Стевином, сочинения которого он издал на французском языке с собственными ценными добавлениями (1625 и 1634). Мнимые решения Жирар именовал «скрытыми» (*solutions enveloppées*) и характеризовал как невозможные (*impossibles*): они, как он специально разъяснял в связи с решением уравнения $x^4 - 4x + 3 = 0$, имеющего корни $x_1 = x_2 = 1$, $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{2}$, служат для того, чтобы придать достоверность общему правилу решения; кроме того, других решений больше нет, и, наконец, они полезны. Здесь впервые, кажется, явно была высказана мысль о пользе в математике так называемых идеальных, или несобственных, элементов.

Употребление мнимых решений позволило Жирару развить далее теорию симметрических функций корней и высказать основную теорему алгебры в весьма общей форме.

Отдельные случаи зависимостей между корнями и коэффициентами уравнений были известны ранее, например, Кардано для кубического уравнения.

Для любого уравнения с положительными корнями эти зависимости, обнаруживающиеся при образовании уравнений путем перемножения двучленов вида $x - x_k$, где x_k — корень, выразил Виет. Если уравнение записано в привычной нам форме:

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0,$$

¹ P. Rothe. *Arithmetica philosophica*. Nürnberg, 1608, S. 16.

² Т. е. разности между суммой углов этого треугольника и двумя прямыми углами. Эта теорема была найдена в 1603 г., но не опубликована Гарриотом; ее вновь получил и обнародовал в 1632 г. Кавальери.

то элементарные симметрические функции будут

$$-\sum_1^n x_k = a_1, \quad \sum_{k \neq l}^n x_k x_l = a_2, \dots, \quad (-1)^n x_1 x_2 \dots x_n = a_n.$$

Как поступал Виет при наличии отрицательных корней, неизвестно; вероятно, он привлекал тогда положительные корни уравнения $f(-x) = 0$. Но лишь с допущением мнимых корней только что приведенные равенства приобретают силу для любого алгебраического уравнения со старшим коэффициентом 1. Именно в таком общем виде, хотя и в ином выражении, сформулировал эти равенства Жирар. Ему же принадлежит заслуга рассмотрения другого класса симметрических функций — степенных сумм корней

$$S_m = x_1^m + x_2^m + \dots + x_n^m, \quad m = 1, 2, 3, 4 \dots$$

Он представил их через коэффициенты; первые четыре суммы, приводимые Жираром, в наших обозначениях имеют вид

$$S_1 = -a_1, \quad S_2 = a_1^2 - 2a_2, \quad S_3 = -a_1^3 + 3a_1 a_2 - 3a_3, \\ S_4 = a_1^4 - 4a_1^2 a_2 + 4a_1 a_3 + 2a_2^2 - 4a_4,$$

других степенных сумм в сочинении Жирара нет. Рекуррентные формулы для S_m принадлежат Ньютону.

Исходя из тех же соображений и того же приема образования уравнений, Жирар впервые высказал основную теорему алгебры в следующих словах: «Все уравнения алгебры получают столько решений, сколько их показывает наименование высшей величины»¹. При этом, как и в предыдущих правилах, учитывалась и кратность корней. Доказать общую теорему о числе корней алгебраического уравнения было тогда непосильно. Это удалось только в результате долгих усилий многих ученых, и среди них Даламбера, Эйлера, Лагранжа, Лапласа и Гаусса. Предварительно следовало выяснить, какова арифметическая природа тех «невозможных» решений, которые встречаются в алгебре, т. е. установить, что все они сводятся к числам, которые позднее получили название комплексных. В этом вопросе еще долго царила неясность.

Подобно сочинениям Роте и Гарриота, книга Жирара не получила большой известности и распространения. Здесь имела некоторое значение громоздкая символика, преимущественно взятая у Бомбелли и Стевина. Но не это было главным: решающим явился выход в 1637 г. «Геометрии» Декарта, после чего все более ранние алгебраические труды оказались в глазах новых поколений устарелыми по форме, по изложению и в значительной мере по содержанию.

Всеобщая математика Декарта

Новый мощный толчок развитию алгебры, да и всей математики, сообщил Декарт.

Рене Декарт, в латинизированной форме Картезиус (1596—1650), происходил из дворянской семьи. Он родился в городе ла Э — ныне

¹ A. Girard. *Invention nouvelle en l'algèbre*. Amsterdam, 1629, II Théorème, E 4.

ла Э-Декарт (департамент Эндр-э-Луар)—и получил хорошее образование в иезуитском коллеже, открытом в 1604 г. в городе Ла-Флеш. Отец Декарта, желая, чтобы сын стал военным, в 1613 г. отправил его в Париж. Светская жизнь, однако, не удовлетворяла юношу, природные склонности которого влекли к философии и математическим наукам. В Париже он сблизился с учеником Виета Клодом Мидоржем (1587—1647) и священником Мареном Мерсенном (1588—1648), другим воспитанником коллежа в Ла-Флеш, человеком широчайшей эрудиции и неутомимым пропагандистом новых естественнонаучных идей. Мерсенну принадлежат большие заслуги в организации научной работы. Ведя переписку с огромным кругом ученых Франции и других стран, он играл в течение нескольких десятков лет роль центра европейской научной взаимной информации; вместе с тем он явился главным инициатором тех частных собраний упоминавшейся выше *Academia Parisiensis*, из которых выросла уже после его кончины Парижская академия наук.

Два с лишним года парижской жизни Декарт посвятил научным занятиям. Все же, уступая давлению родных, он в 1617 г. поступил волонтером к голландскому правителю и полководцу Морицу Нассаускому и затем несколько лет, правда с долгими перерывами, провел в походах и сражениях 30-летней войны, начавшейся в 1618 г. Благодаря этому он объездил Германию, Венгрию и Чехию; 1623—1625 гг. он провел в Италии и затем на три года возвратился во Францию, где принял участие в осаде королевскими войсками гугенотской крепости Ла-Рошели, павшей в 1628 г. Но свои досуги, а их было немало, Декарт всегда отдавал науке. В конце 1618 г. он свел знакомство в г. Бреда с разносторонним голландским ученым, коперниканцем и атомистом, Исааком Бекманом (1588—1637) и обсуждал с ним актуальные задачи физики и математики. Из научного дневника Бекмана, опубликованного недавно, видно, что он в то время, т. е. ранее Галилея, вывел при участии Декарта правильный закон падения тяжелых тел в пустоте; он открыл также основные законы соударения тел и полагал, что движущимся по прямым или окружностям телам свойственно стремление сохранять движение, если тому не препятствует внешнее сопротивление. Вопросы теории музыки и оптики тоже не оставлены были в стороне. Влияние Бекмана на Декарта вне сомнения, хотя сам Декарт о нем в своих сочинениях не упоминал, как и о других своих ближайших предшественниках. Это обстоятельство встречается нередко и не удивительно; удивительно другое: Декарт, по-видимому, забыл о занятиях с Бекманом проблемой падения тяжелых тел и позднее, в 1638 г., выразил несогласие с учением Галилея. Вместе с тем Декарт изучал сочинения немецких алгебраистов — коссистов и греческих математиков. В 1620 г. он познакомился в Ульме с видным коссистом, а также инженером, придумавшим несколько важных механических приспособлений, Иоганном Фаульгабером (1580—1635). В Париже в середине 20-х годов Декарт встречался со многими французскими математиками, в том числе Ф. Дебоном, Ж. Дезаргом и, вероятно, Ж. Робервалем.

Вскоре после осады Ла-Рошели в жизни Декарта произошел перелом, намечавшийся, впрочем, много ранее. Система воззрений его в основном сложилась, и теперь он решительно ищет уединения и покоя, чтобы без помех завершить намеченные им обширные планы творчества.

Хорошо, говорил он, прожил тот, кто хорошо укрылся — *bene qui latuit, bene vixit*. Он резко сокращает личное общение с учеными, в том числе с друзьями; впрочем, до конца жизни он поддерживал оживленную



Рене Декарт
(с портрета, приписываемого Ф. Гальсу и хранящегося в Лувре,
Париж)

научную переписку, по большей части через своего друга Мерсенна. В 1629 г. Декарт переселился в Голландию, где жил в одиночестве; вероятно, этот переезд был связан и с опасениями, что его философские взгляды могут навлечь преследования католической церкви. В Голландии Декарт прожил почти двадцать лет, и здесь были изданы его главные труды.

Однако и в Голландии философские воззрения Декарта навлекли гнев местных, протестантских церковников и обскурантов. Чтобы «хорошо укрыться», он по приглашению королевы Христины переехал в 1649 г. в Стокгольм, но суровый климат Швеции оказался для Декарта губительным, и он умер от простуды в начале 1650 г.

Важнейшие сдвиги в науке особенно в переломные эпохи, когда в центр внимания ставились проблемы метода познания, не раз производились

Титульный лист первого издания «Геометрии» Декарта
(Париж, 1637)

DISCOURS
DE LA METHODE

Pour bien conduire sa raison, & chercher
la verité dans les sciences.

Plus

LA DIOPTRIQUE.

LES METEORES.

ET

LA GEOMETRIE.

Qui sont des essais de cete METHODE.



A LEYDE

De l'Imprimerie de IAN MAIRE.

MDCCCXXXVII.

Avec Priuilege.

людьми широкого философского склада мышления. Таковы были Галилей и Ньютон, Декарт и Лейбниц.

Мировоззрение Декарта было дуалистическим, он принимал существование двух самостоятельных субстанций — материи и духа. Но в своей физике Декарт оставался всецело на почве материализма, притом, как уже говорилось, материализма механического. Все явления природы он трактовал как принципиально сводимые к перемещению делимых и подвижных частей трехмерно протяженной материи. Целью Декарта было дать общий метод исследования движения пространственных фигур в их взаимодействиях и взаимосвязях. Но для успеха такого исследования требовался метод, т. е., как писал Декарт около 1629 г., «точные и простые правила, строгое соблюдение которых всегда воспрепятствует принятию ложного за истинное и без лишней траты умственных сил, но постепенно и непрерывно уве-

Титульный лист второго латинского издания «Геометрии»
Декарта (Амстердам, 1659—1661)

GEOMETRIA,
a
RENATO DES CARTES

Anno 1637 Gallicè edita; postea autem
Una cum Notis

FLORIMONDI DE BEAUVNE,
In Curia Blesensi Consilarii Regii, Gallicè conscriptis in
Latinam linguam versis, & Commentariis illustrata,

Operà atque studio

FRANCISCI A SCHOOTEN,
in Acad. Lugd. Batava Matheseos Professoris.

Nunc demum ab eodem diligenter recognita, locupletioribus Commentariis
instruita, multisque egregie accessionibus, tam ad uberiorem expli-
cationem, quam ad ampliandam hujus Geometrie ex-
cellentiam facientibus, exornata,

Quorum omnium Catalogum pagina versa exhibet.



AMSTELÆDAMI,

Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios,
c1659

личивая знания, способствует тому, что ум достигает истинного познания всего, что ему доступно»¹. Такого метода Декарт не усматривал в науке прошлых времен.

Мы не можем входить в детали рационалистического метода Декарта, построенного главным образом под влиянием математики, и прежде всего алгебраических приемов рассмотрения задач. Конкретным орудием наук о природе должна была стать некоторая новая математика. Об этой новой математике много говорится в философских сочинениях Декарта и его переписке. Ее изложение содержится в единственном печатном труде Декарта по математике — «Геометрии», появившемся на свет в качестве третьего приложения к его философскому трактату «Рассуждение о методе», два других приложения были посвящены оптике и вопросам физики Земли и атмосферы. Полное название этого труда, написанного для более широкой доступности соотечественникам автора на французском языке, таково: «Рассуждение о методе, чтобы хорошо направлять свой разум и отыскивать истину в науках. Вместе с Диоптрикой, Метеорами и Геометрией, которые суть примеры этого метода» (*Discours de la méthode. Pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences. Plus la Dioptrique, les Météores et la Géométrie. Qui sont des essais de cette méthode*, Leyde, 1637). На фотографии (см. стр. 28) воспроизведен титульный лист этого издания; имя автора, как видно, указано не было.

Впрочем, гораздо большее распространение в ученом мире нашло латинское издание «Геометрии», подготовленное профессором Лейденской инженерной школы Францем ван Схоотеном (1615—1660), поклонником, другом и учеником Декарта и учителем многих голландских математиков, в том числе Гюйгенса². В латинском переводе «Геометрия» вышла четыре раза (*Geometria*, 1-е изд., Lugduni Batavorum, 1649; 4-е изд. под редакцией Я. Бернулли, Франкфурт-на-Майне, 1695). Большую ценность уже первому изданию сообщили комментарии и оригинальные дополнения Схоотена и французского математика Дебона, к которым во втором издании (Амстердам, 1659—1661), разросшемся до двух томов, были добавлены, помимо новых статей этих двух авторов, еще работы учеников Схоотена — Гудде (по алгебре и теории экстремумов), Хейрата (о спрямлении плоских кривых), де Витта (о конических сечениях), содержавшие ряд новых значительных открытий.

Во второй половине XVII в. «Геометрия» являлась настольной книгой всех творческих математиков.

Свою новую математику Декарт нередко (но не в «Геометрии») называл всеобщей. Математика для Декарта была общей наукой о пространственных образах, их расположении и измерении. «К области математики, — писал он, — относятся только те науки, в которых рассматривается либо порядок, либо мера и совершенно не существенно, будут ли это числа, фигуры, звезды, звуки или что-нибудь другое». Отсюда он приходил к заключению, что «должна существовать некая общая наука, объясняющая все относящееся к порядку и мере, не входя в исследование никаких частных предметов, и эта наука должна называться не иностранным словом, но старым, уже вошедшим в употребление именем всеобщей математики (*Mathesis universalis*), ибо она содержит в себе то, благодаря чему другие науки называются

¹ Р. Декарт. Правила для руководства ума. Перевод В. Пикова. М., 1936, стр. 61.

² Другой выдающейся заслугой Схоотена было издание «Математических трудов» Ф. Виета (*Opera mathematica*, Lugduni Batavorum, 1646).



Франц ван Схоотен
(с портрета, хранящегося в библиотеке Лейденского университета)

частями математики»¹. Под «иностранном словом» Декарт понимал «алгебру», и общая наука, о которой он говорит, ближе всего к алгебре. Арифметика и геометрия того времени не обладали в глазах Декарта должной силой метода, и лишь некоторые следы настоящей математики он усматривал в сочинениях Паппа и Диофанта.

План всеобщей математики начал складываться не позднее 1619 г. Будучи в Голландии и находясь в дружбе с Бекманом, Декарт, как уже было сказано, интенсивно занимался физикой и математикой. В частности, он обнаружил в то время (но никогда не опубликовал) важное для топологии соотношение между числом ребер, граней и вершин выпуклых многогранников, много позже вновь найденное Эйлером², занимался построением корней кубических уравнений с помощью механизмов, родственных «вставке» древних, и начал интересоваться проблемой решения алгебраических уравнений в целом. К этому времени относятся описания Декартом механизмов для деления угла на произвольное число равных частей и

¹ Р. Декарт. Правила для руководства ума, стр. 68.

² Это и другие открытия Декарта в теории многогранников были опубликованы лишь в 1860 г.

для построения любого числа средних пропорциональных. В письме от 26 марта 1649 г. к Бекману он сообщал, что разрабатывает «совершенно новую науку», дающую средства общим образом разрешать любые вопросы относительно как дискретных, так и непрерывных величин. Декарт выражает надежду, что все проблемы, относящиеся к непрерывным величинам, сводятся к нахождению пересечений некоторых линий — прямых или окружностей, более общих линий, описываемых «единым движением» с помощью «новых циркулей», и, наконец, линий, порождаемых «различными, взаимно несоподчиненными движениями», вроде квадратрисы. Под «новыми циркулями» Декарт имеет в виду шарнирные механизмы, с помощью которых, как показал в 1876 г. А. Кемпе, можно строить дуги любых плоских алгебраических (и только алгебраических) кривых, откуда видно, что кривые I и II классов Декарта — алгебраические, а кривые III класса — трансцендентные. При этом Декарт считает, что всякая задача относится к одному из этих трех классов и ставит своей целью установление того, какие задачи решаются с помощью первых двух типов линий, «после чего в геометрии почти ничего не останется искать»¹. Здесь намечены основные положения «Геометрии» — классификация задач по типу необходимых для решения линий и классификация линий по типу порождающих их движений.

В середине 1620-х годов Декарт открыл закон преломления света, несколько ранее найденный В. Снеллем. Это открытие дало новый стимул для математических исследований Декарта. Разыскивая линзы, преломляющие по этому закону лучи, идущие из данной точки одной среды в данную точку другой среды, он, как упоминалось, столкнулся с задачей отыскания кривой по свойствам ее нормалей, т. е. с первой из так называемых обратных задачи на касательные; решение задачи сводится к интегрированию дифференциального уравнения. Получив с помощью бесконечно малых решение в виде овалов, ныне носящих его имя, он доказал это их свойство алгебраически посредством изобретенного им метода проведения нормалей и касательных. В 1629 г. в связи с решением этой задачи Декарт пользовался уже некоторого рода координатами — «неопределенными количествами» (*quantités indéterminées*), которые обозначал *x* и *y* в отличие от данных отрезков *a* и *b*.

К этому же времени относится геометрическое построение корней произвольного уравнения четвертой степени без второго члена с помощью параболы и окружности, — прием, восходящий к грекам и развитый в странах ислама. Декарт отмечает, что число действительных корней равно числу точек пересечения кривых, отсутствие точек пересечения означает, что уравнение не имеет «истинных» (*verae*) корней, но только «воображаемые» (*imaginae*). Истинные корни Декарт подразделял на «явные» (*explicitae*) и «неявные» (*implicitae*), указывая, как расположены при этом выражающие их отрезки.

В 1631 г. лейденский профессор математики и восточных языков Я. Голь (1596—1667) обратил внимание Декарта на задачу Паппа о геометрическом месте к $2n$ и $2n - 1$ прямым, т. е. о геометрическом месте точек, произведение расстояний которых до n прямых находится в постоянном отношении к произведению их расстояний от n или $n - 1$ других прямых. В начале 1632 г. Декарт сообщил Голью о решении этой задачи: при любом числе данных прямых искомая линия описывается единым непрерывным

¹ R. Descartes. Oeuvres, v. X. Paris, 1908, p. 156—157.

движением и определяется с помощью «простых», именно геометрических отношений,— мы бы сказали алгебраическим уравнением. В этой связи Декарт предложил некоторую классификацию кривых в зависимости от степени ее уравнения,— мы еще к этому вернемся.

Около 1629 г. Декарт продвинулся также в реформе основ алгебраического алгоритма. Для представления общей непрерывной величины он, как Виет, пользовался геометрией, однако, в отличие от Виета, который, следуя древним и изображая величины отрезками, степени и произведения величин представлял как прямоугольники, параллелепипеды и т. д., Декарт счел целесообразным ограничиться представлением любых величин и составленных из них выражений отрезками, обозначаемых строчными буквами алфавита. Для этого он построил исчисление отрезков, позволившее чрезвычайно упростить все алгебраическое исчисление и его приложения в геометрии.

Таким образом, еще за несколько лет до выхода «Геометрии» Декарт разработал в главном свой общий математический метод. Все задачи математических наук, полагал Декарт, могут быть выражены с помощью уравнений той или иной степени. Единственный общий метод решения уравнения заключается в построении их корней, как отрезков — координат точек пересечения некоторых плоских кривых. Эти линии сами выражаются алгебраическими уравнениями «внеопределенных количеств» x , y ; надлежащая классификация линий позволяет всегда выбрать кривые, подходящие к данной задаче. Буквенное исчисление отрезков сливалось в органическое целое с геометрией линий, и только их синтез давал универсальный метод решения проблем в области непрерывных величин. Что касается задач, которые мы теперь называем трансцендентными, то для них создание общего метода, полагал Декарт, невозможно. Его всеобщая математика претендовала на роль единственного общего приема математического исследования. В этом, как вскоре выяснилось, была ограниченность философии математики автора «Геометрии».

Исторически из всеобщей математики Декарта выросли новая алгебра и аналитическая геометрия. Даже в самой «Геометрии» изложение обеих наук велось преимущественно отдельно.

В основе алгебры, да и всей математики, лежит понятие числа. Рассмотрим, какие изменения претерпело это фундаментальное понятие, в частности, и у Декарта.

Расширение понятия числа

Еще в странах Востока область чисел была пополнена иррациональными числами, т. е. отношения несоизмеримых величин начали рассматривать как числа, распространяя на них основные арифметические операции и терминологию. Этот же процесс происходил в средневековой Европе. И если в XVI в. преобладало еще традиционное представление, согласно которому числами можно называть только положительные рациональные, то уже Стевин, например, как мы знаем, решительно возражал против такого ограничения (см. т. I, стр. 306).

В XVI в., да и позднее, также имелись ученые обоих направлений, но большинство склонялось к признанию равноправия за иррациональными числами. Необходимо было теоретически закрепить это равноправие, достигнутое на практике. Мы лишь упомянем попытки видоизменить общую

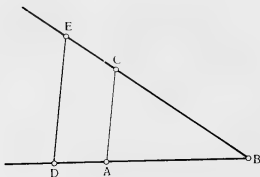


Рис. 1

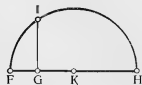


Рис. 2

теорию отношений Евдокса — Евклида, связав ее основные определения с естественным процессом измерения величин, — попытки, сходные с «антифайретической» теорией отношений ученых стран ислама. Предпринимавшиеся не раз попытки подобного рода, целью которых было сблизить учение о пропорциях с арифметикой иррациональных чисел, теперь уже не играли заметной роли в развитии учения о числе. Ведущие математики поступили иначе: они пришли к пониманию числа, как отношения, в смысле теории, изложенной в V книге «Начал» Евклида.

Такая трактовка вопроса, не высказанная, правда, явно, содержалась в исчислении отрезков Декарта. «Геометрия» 1637 г. начинается с установления связи между «исчислением арифметики» и «построениями геометрии»:

«Все задачи геометрии можно легко привести к таким терминам, что для их построения нужно будет затем знать лишь длину некоторых прямых линий».

«Подобно тому, как вся арифметика состоит только в четырех или пяти действиях, именно в сложении, вычитании, умножении, делении и извлечении корней, которое можно считать некоторого рода делением, подобно этому в геометрии, чтобы подготовить искомые линии к определению, нужно только прибавить к этим линиям или отнять от них другие; или же нужно, имея линию, которую я, дабы установить более тесную связь с числами, назову единицей и которая обыкновенно может быть выбрана произвольно, и имея еще две другие линии, найти четвертую линию, так относящуюся к одной из этих двух, как другая к единице, а это то же самое, что умножение; или же найти четвертую линию, так относящуюся к одной из этих двух, как единица к другой, а это то же самое, что деление; или, наконец, найти одну, или же две, или несколько средних пропорциональных между единицей и какой-нибудь другой линией, а это то же самое, что извлечь квадратный или же кубический и т. д. корень»¹.

Так, для умножения BD на BC (рис. 1) берется единица AB , соединяют точки A и C и проводится DE параллельно AC ; произведением будет BE . Умножение, деление и извлечение корней² опираются на учение о подобии, которое, в свою очередь, было основано на античной общей теории отношений.

Все операции над отрезками приводят в исчислении Декарта к отрезкам. Любой отрезок, в его отношении к единичному, служит эквивалентом не-

¹ Р. Декарт. Геометрия. Перевод, примечания и статья А. П. Юшкевича. М.—Л., 1938, стр. 11—12.

² Квадратный корень из GH (рис. 2) изображается полухордой GI полукруга FIH , диаметр которого $FH = FG + GH$, где FG — единичный отрезок, причем $GI \perp FH$.

которого действительного числа, а поле отрезков оказывается изоморфным полю действительных чисел. Само исчисление основано на том, что отрезки обозначаются буквами a , b , c или цифрами, а операции — обычными знаками арифметики и алгебры.

Таким образом, хотя по существу объектами операций были не числа, а геометрические отрезки, Декарт отождествлял отрезки, соизмеримые с единичным отрезком, и соответствующие им целые или дробные числа и применял слово «число» (*nombre*) также к несоизмеримым отрезкам. В последнем случае он называл отрезки «глухими числами» (*nombres sourds*).

Представление о числе, как отношении, было вполне отчетливо высказано в лекциях по алгебре, которые И. Ньютон читал в Кембриджском университете в 1673—1683 гг. и которые были изданы его преемником в должности кембриджского профессора У. Уистоном (1667—1752). Определение числа во «Всеобщей арифметике или книге об арифметических синтезе и анализе» (*Arithmetica universalis sive de compositione et resolutione arithmetica liber, Cantabrigiae, 1707*) гласит: «Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой за единицу. Число бывает трех видов: целое, дробное и иррациональное (*surdus*). Целое число есть то, что измеряется единицей; дробное — кратной долей единицы; иррациональное число несоизмеримо с единицей»¹.

Начиная с 1740 г. ньютоново определение числа приводил в своих широко распространенных учебниках профессор в Галле Хр. Вольф (1679—1754), им пользовались Л. Эйлер и его многочисленные последователи. Попытки обосновать учение об иррациональном числе с помощью множества рациональных чисел начались в середине XVIII в. Так, лейпцигский профессор А. Г. Кестнер (1719—1800) рассматривал иррациональное число, по сути дела, как предел его рациональных приближений, Современные построения теории иррациональных чисел были опубликованы почти одновременно около 1870 г. Р. Дедекиндом, К. Вейерштрассом, Л. Кронекером и Ш. Мерз (см. т. III, гл. 2).

Заметим, что на протяжении XVII в. среди иррациональных чисел стали различать алгебраические и трансцендентные. Определение трансцендентных количеств как таких, которые не могут быть определены никаким уравнением определенной степени (подразумевается — с рациональными коэффициентами) и «выходят за пределы» (*transcendent*) любого алгебраического уравнения, дал в 1686 г. Лейбниц, еще раньше применивший термины «алгебраический» и «трансцендентный» в применении к кривым линиям (см. стр. 104).

Отрицательные и мнимые числа

Подобно положительным иррациональным числам, прочно утверждаются и отрицательные числа. Мы видели, что Жирар и Декарт дали их геометрическое истолкование, как противоположно направленных отрезков. «Геометрия» Декарта вообще сыграла важную роль в более широком применении отрицательных чисел в алгебре и геометрии, хотя в ней говорилось еще о «ложных» корнях» (*racines fausses*) уравнений в противоположность

¹ И. Ньютон. Всеобщая арифметика. Перевод, статья и комментарии А. П. Юшкевича. М., 1948, стр. 8.

«истинным» (vraies), т. е. положительным. Это словоупотребление не должно вводить в заблуждение: вместе с «истинными» корнями Декарт объединял «ложные», которые «меньше, чем ничто», в одну категорию «действительных» (réelles) корней, противопоставляя их «воображаемым» или «мнимым» (imaginaires). Здесь впервые появился термин «действительный корень», воспринятый затем другими математиками XVII в. Заметим, что Эйлер в 1777 г. (опубл. 1794) принял первую букву *i* слова *imaginaris* в качестве знака мнимой единицы $\sqrt{-1}$; этот символ вошел в общее употребление благодаря Гауссу (1801).

Все же некоторые свойства отрицательных чисел оставались некоторое время неясными, особенно отношения порядка. Например, вызывало недоумение, что в пропорции

$$\frac{1}{-4} = \frac{-1}{4}$$

в левом отношении первый член больше второго, а в правом — первый член меньше второго, т. е. как будто большее отношение равно меньшему¹. Неясны были основания действий с отрицательными числами. Попыткам доказать соответствующие правила посвятили немало усилий ученые XVIII в. и мы подробнее рассмотрим весь этот круг вопросов во 2 главе III тома.

Еще большие трудности доставляли мнимые числа. Их польза для вычислений становилась все более несомненной. Жирар, как мы видели, и в несколько менее четкой форме Декарт (см. далее, стр. 42), правильно оценили их значение в построении общих алгебраических теорий. Джон Валлис в «Трактате по алгебре» (*A Treatise of Algebra*, Oxford, 1685) выдвинул еще такое соображение: мнимые корни указывают на невозможность предложенной задачи и показывают, как следует видоизменить ее постановку, чтобы решение стало возможным и действительным. Этот аргумент был подхвачен Ньютоном и Лейбницем.

Джон Валлис, сын священника из Кента, получил первоначально классическое образование в Кембриджском университете. Он обладал феноменальной памятью и однажды бессонной ночью высчитал в уме 27 знаков квадратного корня из 53-значного числа, а утром продиктовал их. Валлис самостоятельно проработал основные труды античных математиков, «Геометрию» Декарта и труды Торричелли и Кавальери. По окончании университета Валлис работал священником, продолжая занятия математикой. Во время Английской революции он выдвинулся расшифровкой перехваченных писем сторонников короля, и в 1649 г. Оливер Кромвель сделал его профессором кафедры геометрии в Оксфорде, ранее занимавшейся Бритсом. Валлис сохранил кафедру и влияние и после реставрации; он получил также должность придворного священника. Мы упоминали уже, что он был одним из организаторов и первых членов Королевского общества. Главнейшими его математическими трудами были «Арифметика бесконечного» (*Arithmetica infinitorum*, Oxoniae, 1655), о важном значении которой для создания математического анализа мы будем говорить ниже (см. стр. 152 и 181) и упомянутый «Трактат по алгебре».

¹ Это недоумение впервые высказал, кажется, друг Б. Паскаля философ и математик Антуан Арно (1612—1694) в «Новых началах геометрии» (*Nouveaux éléments de géométrie*, Paris, 1667).



Джон Валлис
(с портрета Дж. Суста, принадлежащего Лондонскому
Королевскому обществу)

Тот же Валлис, которому вообще учение о числе обязано подробной разработкой наиболее передовых идей его времени, предложил первую геометрическую интерпретацию мнимых чисел. В «Трактате об алгебре» он рассматривает мнимую величину $\sqrt{-bc}$ как среднюю пропорциональную между величинами $-b$ и c или b и $-c$, т. е. как отрезок, перпендикулярный к отрезкам b , c , отложенным на одной прямой по разные стороны от основания перпендикуляра. Эта мысль, не встретившая поддержки, вновь была выдвинута в несколько другой форме в середине XVIII в. Г. Кюном. Однако ни Валлису, ни Кюну не удалось развить ее удовлетворительным образом, — это сделали в 1799 г. К. Вессель и в 1806 г. Ж. Арган. До того природа мнимых чисел оставалась окутанной мистическим туманом, и, например, Лейбниц отзывался о них, как о чем-то промежуточном, как об «амфибии» между бытием и небытием. Неясна была и арифметическая природа мнимостей.

В XVI в. в связи с решением кубических и квадратных уравнений были введены выражения вида $a + b\sqrt{-1}$. Но все ли мнимости алгебры имеют

такую форму? Декарт определил мнимые корни уравнений чисто отрицательно: как недействительные корни, которые можно вообразить себе в числе, требуемом для справедливости основной теоремы алгебры. Валлис полагал, что мнимые корни уравнений связаны с извлечением квадратных корней. Но всегда ли эта операция приводит к результату $a + b\sqrt{-1}$? Лейбниц высказал в 1702 г. мнение, что это не так и что существуют еще и другого типа мнимости, ибо по случайному недосмотру он не заметил разложения двухчлена $x^4 + a^4$ на множители

$$(x^2 + \sqrt[4]{2}ax + a^2)(x^2 - \sqrt[4]{2}ax + a^2),$$

а вместе с тем получил, что

$$x^4 + a^4 =$$

$$= (x + a \sqrt[4]{\sqrt{-1}})(x - a \sqrt[4]{\sqrt{-1}})(x + a \sqrt{-\sqrt{-1}})(x - a \sqrt{-\sqrt{-1}}).$$

Проблему арифметических свойств мнимых чисел подробно исследовали в середине XVIII в. Даламбер и Эйлер. Но уже в самом начале XVIII в. Лейбниц и И. Бернулли показали важные приложения мнимых чисел не только в алгебре, но и в анализе, — к этому мы еще вернемся в III томе.

Десятичные и непрерывные дроби

Основным средством представления чисел в науке XVII в. становятся десятичные дроби, которым все чаще и чаще отводится место и в учебных руководствах. Свойства простых и смешанных десятичных дробей рассмотрел в «Трактате по алгебре» Валлис, заметивший, что извлечение корней приводит в случае иррациональности к бесконечным непериодическим дробям.

Поиски наиболее простых способов приближенного выражения квадратных корней привели профессора университета в Болонье Пьетро Антонио Катальди (1548—1626) к открытию непрерывных (цепных) дробей, позволяющих построить рациональное приближение любых иррациональностей.

В разделе об античной теории делимости (т. I, стр. 76) говорилось, что уже применение алгоритма нахождения общего наибольшего делителя двух чисел содержит в себе вычисление неполных частных непрерывной дроби. К тому же приводили, как мы видели, некоторые приемы извлечения иррациональных квадратных корней; в этом случае последовательность неполных частных становится бесконечной. Разложение

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a + \dots}}}$$

на числовых примерах встречалось, по существу, у многих ученых древности и Средних веков вплоть до Бомбелли (1572). Заслугой Катальди явилось выделение понятия о непрерывной дроби, как такового, и введение специального знака ее; он заметил также, что значение непрерывной дроби заключается между последовательными подходящими дробями. Свое



Уильям Броункер
(с портрета П. Лели, принадлежащего Лондонскому Королевскому обществу)

открытие Каталди изложил в «Трактате о кратчайшем способе нахождения квадратного корня из чисел» (*Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra delli numeri*, Bologna, 1613). Его обозначение почти не отличается от современного. Так, разложение $\sqrt{18}$ он писал в виде

$$4. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}.$$

(здесь & есть сокращение латинского et, т. е. «и») или же

$$4. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}.$$

Вскоре затем (1618, 1636) профессор восточных языков и математики в Альтдорфе Даниил Швентер (1585—1636) применил без какого-либо специального обозначения процедуру вычисления непрерывных дробей с числителями 1 к приближенному выражению обыкновенных дробей с большими числителями и знаменателями в меньших числах. При этом он уже

фактически вычислял числитель и знаменатель k -й подходящей дроби по двум ей предшествующим с помощью рекуррентного соотношения, основного в теории непрерывных дробей. Если несократимая k -я подходящая дробь $[n; n_1, n_2, \dots, n_k]$ непрерывной дроби $[n; n_1, n_2, \dots, n_m]$ есть p_k/q_k , то

$$p_{k+1} = n_{k+1}p_k + p_{k-1}, \quad q_{k+1} = p_{k+1}q_k + q_{k-1}.$$

Валлис в «Арифметике бесконечных» (1656), о которой мы еще будем говорить особо, установил эти соотношения в случае любой непрерывной дроби. Он записывал эти дроби, которые именовал непрерывными (*fractiones continue fractae*), подобно Кательди, но опуская союз &.

Современной записью мы обязаны Гюйгенсу, который употребил непрерывные дроби, как и Швентер, для представления в возможно меньших числах дробей с большими числителями и знаменателями. Эта задача встретила Гюйгенсу при построении планетария, в котором отношения чисел зубцов колес должны соответствовать отношениям периодов обращения планет вокруг Солнца, выражающимся такими неудобными дробями. Решение задачи вместе с изложением простейших свойств непрерывных дробей, по большей части нами уже упомянутых, Гюйгенс привел в изданном посмертно «Описании планетарного автомата» (*Descriptio automati planetarii*, Hagae, 1698).

Наиболее замечательным открытием в этой области было преобразование бесконечного произведения, найденного Валлисом для $4/\pi$ (см. стр. 154), в бесконечную непрерывную дробь

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{9}{2 + \frac{25}{2 + \frac{49}{2 + \dots}}}}.$$

Это удивительное выражение нашел знатный любитель математики, воспитанник Оксфордского университета, а впоследствии первый президент Королевского общества в Лондоне лорд Уильям Броункер (1620—1684), письменно сообщивший его без вывода Валлису. Оно помещено в «Арифметике бесконечных» последнего.

Все это были только первые шаги в теории непрерывных дробей, главными успехами в разработке и применении которой мы обязаны прежде всего Эйлеру.

Алгебра Декарта

Мы уже знаем, что в основе всеобщей математики Декарта лежало исчисление отрезков. Самое исчисление строилось с помощью усовершенствованной Декартом символики. Он обозначал данные отрезки начальными буквами алфавита: $a, b, c, \dots$, неизвестные же или «неопределенные» (Лейбниц первый стал говорить о «переменных» величинах) — последними буквами: x, y, z . Обозначение степеней было упрощено и приняло знакомый нам вид: $a^2, a^3, \dots, x^2, x^3, \dots$ и т. п.; впрочем, в случае квадрата еще долгое время нередко писали также aa и xx . В результате алгебраические записи Декарта мало отличаются от современных. Однако он еще не распространял свое обозначение степеней на любые дробные и отрицательные показав

тели, — это сделал Ньютон не позднее 1676 г. Для обозначения корней с целым положительным показателем, большим двух, Декарт ставил показатель или первую букву его наименования перед подрадикальным выражением, объединенным нередко горизонтальной чертой сверху и отделенным скобкой или точкой, вроде $\sqrt{C.a^3 - a^3 + abb}$. Это ноовведение, именно, применение черты, было вскоре подхвачено, в отличие от приема Гарриота, пользовавшегося аналогично горизонтальной фигурной скобкой (см. фото на стр. 23). Валлис приподнял показатель корня, оставив его, однако, позади знака радикала (1655). Современная удобная форма $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$ и т. п., предложенная еще Жираром (1629) и применявшаяся, правда непосредственно, Ньютоном и Лейбницем, окончательно утвердилась в первой половине XVIII в.

Следует заметить, что буквенные знаки данных величин означали сами по себе у Декарта только положительные величины и для выражения отрицательных величин он присоединил знак «минус», в случае же коэффициента неизвестного знака ставил перед ним многоточие. Применение букв с предстоящим «плюс» для выражения как положительных, так и отрицательных чисел встречается впервые в работе Гудде, помещенной во втором латинском издании «Геометрии» 1659—1661 гг. Знак равенства, предложенный Декартом, имел вид ∞ . Распространенный во Франции и Голландии до начала XVIII в., он был затем повсюду вытеснен символом Рекорда.

Достоинства декартовой символики обеспечили ей безусловную победу, но на первых порах оставались в ходу и различные другие системы обозначений. На фотографии показаны различные употребительные в XVII в. знаки степеней алгебраических величин, по Валлису, который сам применял

Знаки степеней в книге Дж. Валлиса «*Operum mathematicorum pars prima*» (Оксфорд, 1657, стр. 72)

72	De Notatione Algebraica.		CAP. II.			
Nomina.	Characteres.		Potestas seu gradus.			
Radix	$\mathcal{R}$	R	A	a	a	1
Quadratum	$\mathcal{Q}$	Q	Aq	aa	a^2	2
Cubus	$\mathcal{C}$	C	Ac	aaa	a^3	3
Quad. quadratum	$\mathcal{Q}\mathcal{Q}$	Q $\mathcal{Q}$	Aqq	$aaaa$	a^4	4
Surdefolidum	$\mathcal{S}$	S	Aqc	$\&c.$	a^5	5
Quad. Cubi.	$\mathcal{Q}\mathcal{C}$	QC	Acc		a^6	6
1 ^m Surdefolidum.	$\mathcal{B}\mathcal{S}$	bS	Aqqc		a^7	7
Quad. quad. quad.	$\mathcal{Q}\mathcal{Q}\mathcal{Q}$	Q $\mathcal{Q}\mathcal{Q}$	Aqcc		a^8	8
Cubi cubus	$\mathcal{C}\mathcal{C}$	CC	Accc		a^9	9
Quad. Surdefol.	$\mathcal{Q}\mathcal{S}$	QS	Aqqcc		a^{10}	10
3 ^m Surdefolidum	$\mathcal{C}\mathcal{S}$	cS	Aqccc		a^{11}	11
Quad. quad. cubi	$\mathcal{Q}\mathcal{C}\mathcal{C}$	Q $\mathcal{C}\mathcal{C}$	Acccc		a^{12}	12
4 ^m Surdefolidum	$\mathcal{D}\mathcal{S}$	dS	Aqqccc		a^{13}	13
Quad. 2 ⁱ Surdefol.	$\mathcal{Q}\mathcal{B}\mathcal{S}$	QbS	Aqcccc		a^{14}	14
Cubus Surdefol.	$\mathcal{C}\mathcal{S}$	CS	Accccc		a^{15}	15
Quad. quad. quad. quad.	$\mathcal{Q}\mathcal{Q}\mathcal{Q}\mathcal{Q}$	Q $\mathcal{Q}\mathcal{Q}\mathcal{Q}$	Aqqcccc		a^{16}	16
$\&c.$						

то одни, то другие обозначения, хотя преимущественно декартовы. В первом столбце даны названия степеней, в третьем — их сокращения, которые применял в случае числовых уравнений Виет, во втором столбце — космические знаки, в четвертом — знаки видовой алгебры Виета в сокращенной форме, предложенной В. Отредом (1631), в пятом и шестом — обозначения соответственно Гарриота и Декарта.

В исчислении отрезков, как уже говорилось (ср. стр. 34), любое алгебраическое выражение можно было рассматривать как отрезок, если выбран единичный отрезок: члены любого выражения, какова бы ни была формально их размерность, всегда можно считать помноженными или поделенными на единицу в такой степени, чтобы оно стало линейным. Поэтому закон однородности выполнялся автоматически и отпадали неудобства, которые были с ним связаны в геометрической алгебре древних и у Виета.

Основные теоремы алгебры Декарт изложил в третьей книге «Геометрии». Многие из них встречались у его предшественников, особенно Виета, Жирара и Гарриота; в какой мере он обязан последним, судить трудно. Во всяком случае, очень многое явилось его собственностью и именно изложение Декарта, применившего новую превосходную символику и терминологию и сообщившего всем формулировкам максимальную простоту, стало отправным пунктом дальнейшего развития новой алгебры.

Теорию алгебраических уравнений Декарт начинает с принципиально важного предупреждения о важности рассматривать их с правой частью, равной нулю. Затем он переходит к составлению многочленов путем перемножения линейных двучленов вида $x \pm a$ и формулирует основную теорему в таких словах: «Всякое уравнение может иметь столько же различных корней, или же значений неизвестной величины, сколько последняя имеет измерений»¹, несколько далее добавлено, что «хотя всегда можно вообразить себе столько корней, сколько я сказал, но иногда не существует ни одной величины, которая соответствует этим воображаемым корням»². Особо указано, что левая часть уравнения делится на двучлен $x \pm a$, где $\mp a$ есть корень: это позволяет понизить степень уравнения, если известен корень, — прием, известный еще в 1567 г. П. Нупьецу (1502—1578).

Непосредственно далее следует «правило знаков» Декарта для определения числа положительных и отрицательных корней по знакам коэффициентов уравнения. Ньютон несколько уточнил формулировку этого правила, и мы приведем это правило в его выражениях: если среди корней уравнения нет «невозможных», то положительных корней столько, сколько в последовательности коэффициентов перемен знаков от «плюса» к «минусу» — или от «минуса» к «плюсу»; остальные корни отрицательные³. Правило Декарта положило начало целой серии исследований о распределении корней алгебраических уравнений, имеющих важные приложения (например, в теории устойчивости). Доказательства правила, сообщенного в «Геометрии» без вывода, предложены были в 1728 г. профессором в Геттингене и Галле Иоганном Андреасом Зегнером (1704—1777), изобретателем так называемого зегнерова колеса — простейшего типа гидротурбины, а затем и другими математиками. Доказательства эти основаны на рас-

¹ Р. Декарт. Геометрия, стр. 76.

² Там же, стр. 85.

³ Сам Декарт, например, имея в виду уравнения с любыми корнями, о случае положительных корней писал, что их может быть столько, сколько есть перемен знаков; конечно, он подразумевал, что первых не больше, чем вторых.

смотрении изменений в чередовании знаков коэффициентов при умножении левой части на двучлен $x \pm a$ (этим же руководствовался, вероятно, сам Декарт). К тому же кругу вопросов относятся замечания Декарта об определении границ действительных корней, также повлекшие за собой многочисленные дальнейшие исследования.

Наряду с проблемой распределения корней в «Геометрии» поставлена другая фундаментальная проблема приводимости, т. е. разложимости целого многочлена с рациональными (в частности, целыми) коэффициентами на аналогичные множители низших степеней. Так, Декарт рассмотрел вопрос, когда корни кубического уравнения с целыми коэффициентами и старшим из них, равным 1, строятся с помощью циркуля и линейки (т. е. уравнение разрешимо в квадратных радикалах), — вопрос, занимавший еще Хайяма (ср. т. I, стр. 224). Ответ Декарта гласил, что это имеет место в том и только том случае, если уравнение имеет целый корень, т. е. приводимо. Для разрешимости теми же средствами уравнения четвертой степени должна решаться в квадратных радикалах его кубическая резольвента (термин Эйлера). Доказательство неразрешимости циркулем и линейкой неприводимых уравнений третьей степени опубликовал ровно через двести лет преподаватель Политехнической школы в Париже П. Л. Ванцель (1814—1848). Проблема приводимости стала затем предметом глубоких изысканий Ньютона, Эйлера, Лагранжа, Гаусса и многих других ученых.

Общим методом решения алгебраических уравнений служило у Декарта все же их геометрическое построение, которое все его предшественники применяли только в частных случаях, он же оригинально распространил на исследование действительных корней уравнений любой степени. В математике Декарта геометрическое построение корней стало своего рода эквивалентом основной теоремы алгебры в ее тогдашней формулировке; вместе с тем оно могло играть роль универсального метода приближенного графического решения уравнений (ср. стр. 45).

Взаимодействие алгебры и геометрии выступает здесь особенно отчетливо. Прежде всего, действительные корни квадратных уравнений могут быть построены с помощью пересечения окружности и прямой. Это позволяет построить по какой-либо данной координате любую точку кривой второго порядка: при задании одной координаты другая оказывается корнем квадратного уравнения. Поскольку же можно построить сколь угодно много как угодно близких точек кривых второго порядка, эти линии, с точки зрения Декарта, оказываются допустимым средством дальнейшего анализа. Затем корни уравнений третьей и четвертой степеней строятся посредством пересечения окружности и параболы, а это в силу тех же соображений позволяет найти бесконечное количество точек кривых третьего и четвертого порядков, которые, в свою очередь, становятся допустимыми в последующих конструкциях. Далее Декарт строит корни уравнений пятой и шестой степеней с помощью окружности и кривой третьего порядка, носящей теперь имя параболы Декарта или трезубца Ньютона (см. стр. 108). Именно, уравнение вида

$$y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + sy^2 - ty + u = 0$$

решается при помощи окружности

$$x^2 + y^2 - 2 \frac{m}{n^2} y = \frac{t^2}{4n^2 u} - \frac{s}{n^2} \frac{p \sqrt{u}}{n^2}$$

и кривой

$$nxy = y^3 - py^2 - \frac{ty}{2\sqrt{u}} + \sqrt{u},$$

причем

$$n = \sqrt{\frac{t}{\sqrt{u}} + q - \frac{p^2}{4}}, \quad m = \frac{r}{2} + \sqrt{u} + \frac{pt}{4\sqrt{u}}.$$

Далее, говорит Декарт, нужно лишь следовать по тому же пути. Иными словами, построение корней уравнения степени $n > 3$ производится всякий раз с помощью двух кривых порядка ниже n , точки которых строятся на основании решения уравнений степени также ниже n . Возможность нахождения бесчисленного количества произвольных точек кривой была достаточна для Декарта, чтобы принять эту линию как инструмент построений; к тому же он полагал, и совершенно справедливо, что и все точки любой дуги «геометрической» кривой могут быть описаны движением шарнирных механизмов (теорема Кемпе!), а это обеспечивало непрерывность линии. Добавим, что при решении какого-либо уравнения Декарт рекомендует выбирать среди различных пригодных для построения кривых в особенности те, которые принадлежат к возможно низшему роду.

Однако основная линия развития алгебры шла в сторону ее автономного, не зависящего от геометрии построения. Тенденция к тому несомненна и в творчестве Декарта, примером чего служит небольшое рукописное сочинение «Исчисление г. Декарта» (*Calcul de Monsieur des Cartes*). В этом сочинении, написанном кем-то из последователей великого ученого и самим Декартом рекомендовавшемся в качестве введения в чтение «Геометрии», правила буквенного исчисления описаны вне какой-бы то ни было связи с геометрическими построениями.

С полной отчетливостью та же тенденция обнаруживается в алгебраических трудах английских ученых. Во «Всеобщей математике или полном курсе арифметики» (*Mathesis universalis sive arithmeticum opus integrum*, Oxoniae, 1657) Валлис писал: «... всеобщая алгебра является поистине арифметической, а не геометрической и разъяняется скорее при помощи начал арифметических, а не геометрических, хотя в геометрии многое находится или уясняется из алгебраических начал, но отсюда не следует, что алгебра геометрична или же опирается на геометрические начала, ... наоборот, скорее геометрия подчинена общей арифметике»¹. И он указывал, в частности, что алгебраические степени (*potestates*) лучше выражать при помощи арифметических степеней (*gradus*), чем геометрических измерений, как это было у Коссиетов или у Виета.

Алгебра во второй половине XVII века

Участники латинских изданий «Геометрии» дополнили исследования Декарта в различных направлениях, в частности по алгебре. Эразм Бартолин (Бертельсен, 1625—1698), известный в истории физики открытием двойного лучепреломления исландского шпата, а также Схоотен подробно комментировали алгебраические отделы «Геометрии». Например, Схо-

¹ J. Wallis. Opera mathematica, v. I. Oxoniae, 1695, p. 55—56.

отен разъяснил декартов прием решения уравнения четвертой степени, состоявший в представлении левой части в виде произведения двух квадратичных множителей и основанный на методе неопределенных коэффициентов Декарта (см. стр. 194); в «Геометрии» этот прием дан без обоснования. Работавший юристом в Блуа Флоримон Дебон (1601—1652), один из самых ранних последователей Декарта, посвятил специальную статью вопросу о границах действительных корней уравнений до четвертой степени; впрочем это исследование имело элементарный характер, так же как анализ границ корней кубических уравнений, произведенный пятью веками ранее Хайямом. Заслуживают внимания исследования видного амстердамского деятеля, неоднократно избиравшегося бургомистром этого города, Иоганна Гудде (1628—1704). Этот любитель математики, занимавшийся и гидротехническими работами, открыл правило нахождения кратных корней алгебраического уравнения, которое в наших выражениях можно передать следующим образом: двойной корень a уравнения $f(x) = 0$ есть простой корень производного уравнения $f'(x) = 0$, так что двучлен $x - a$ есть общий делитель $f(x)$ и $f'(x)$ и находится чисто алгебраически. Свое правило, легко распространяющееся на корни любой кратности, Гудде применил в задачах на касательные и экстремумы, показав его преимущество перед методом самого Декарта (ср. стр. 195).

Лекции по алгебре Ньютона, т. е. его «Всеобщая арифметика» (1707), также развивали алгебру Декарта. Однако Ньютон, следуя английской традиции, тщательно отделял ее от геометрии. Он возражал против введения в геометрию операций арифметики. «Геометрия, — писал он, — была изобретена для того, чтобы мы, проводя линии, могли с удобством избежать утомительных вычислений. Поэтому не следует смешивать эти две науки»¹. Вместе с арифметикой алгебра образует полную науку вычислений. Ньютон излагал не «всеобщую математику» (Валлис еще сохранил этот картезианский термин), но «всеобщую арифметику», что отражено в заглавии его сочинения. Главное дело алгебры — вычисление корней уравнений, их «построение» у Ньютона играет уже скромную роль вспомогательного приема, позволяющего найти две-три первые цифры корня, после чего вступают в действие более мощные методы приближенного вычисления. В этом «линейном построении уравнений» Ньютон руководствуется, в отличие от Декарта, не принципом возможно низшего порядка кривых, но исключительно простотой их описания.

Мы уже частично касались содержания «Всеобщей арифметики»: трактовки понятия числа и уточненной формулировки правила знаков Декарта. К этому правилу Ньютон присоединил другое, позволяющее во многих случаях определить число «невозможных» корней уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0:$$

это число равно числу перемен знака в последовательности

$$a_0^2, \frac{1}{n} \frac{n-1}{2} a_1^2 - a_2 a_0, \quad \frac{2}{n-1} \frac{n-2}{3} a_2^2 - a_1 a_2, \dots, \quad \frac{n-1}{2} \frac{1}{n} a_{n-1}^2 - a_{n-2} a_n, a_n^2$$

¹ И. Ньютон. Всеобщая арифметика, стр. 298.

или больше этого числа. Как пришел Ньютон к этому результату, неизвестно; обосновать его удалось только в 1866 г. Дж. Сильвестру, доказавшему некоторую более общую теорему. В XIX в. исследованиями об отделе-нии корней занимались также Ж. Б. Фурье и Ж. Ш. Штурм.

Теорию симметрических функций Ньютон обогатил рекуррентным со-отношением для степенных сумм корней $S_m = \sum_{k=1}^n x_k^m$ при $a_0 = 1$ ($m \geq 1$):

$$S_m + a_1 S_{m-1} + a_2 S_{m-2} + \dots + m a_m = 0.$$

С помощью этих формул все суммы S_m выражаются как целые функции с целыми коэффициентами через коэффициенты уравнения. Такие выраже-ния для первых четырех сумм S_m нашел еще Жирар (стр. 25).

Степенные суммы Ньютон применил к определению пределов и приближенному вычислению действительных корней. Но основные методы чис-ленного решения уравнений, изобретенные Ньютоном, не вошли во «Все-общую арифметику»; мы обратимся к ним несколько далее.

Новые идеи внес Ньютон и в вопрос о приводимости уравнений, притом не только о разложении многочленов с целыми (или рациональными) коэффициентами на множители того же вида, но и на множители с ирра-циональными коэффициентами. Во «Всеобщей арифметике» он рассмотрел некоторые случаи приводимости уравнений с целыми коэффициентами над полем $Q(\sqrt{n})$, где n — целое неквадратное число. След за Ньютоном этой проблемой занимался английский математик Э. Варинг (1770). Это были первые шаги в изучении общих полей алгебраических чисел, теория которых была создана лишь в XIX в.

Алгебраический труд Ньютона, естественно, отнесил на задний план алгебру Декарта. Этому содействовала и большая полнота изложения, и обилие чрезвычайно интересных задач. В большинстве случаев Ньютон не приводит выводов теорем; этим занялись многочисленные ученые XVIII, а в некоторых случаях и XIX в.

Теорема Ролля

Крупнейшим алгебраистом-картезианцем был член Парижской акаде-мии наук Мишель Ролль (1652—1719), известный также как один из первых ученых, выступивших с критикой основ исчисления бесконечно малых Лейбница.

В своем «Трактате по алгебре» (*Traité d'algèbre*, Paris, 1690) Ролль предложил для отделения корней алгебраических уравнений метод кас-кадов, примыкающий в некоторых отношениях к работе Гудде о кратных корнях уравнений. Если уравнение $f(x) = 0$ имеет степень n , то его пер-вым, вторым, ..., $(n-1)$ -м и n -м каскадами Ролль называл уравнения, которые мы теперь пишем в виде

$$\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} = 0, \quad \frac{f^{(n-2)}(x)}{(n-2)!} = 0, \dots, f'(x) = 0, \quad f(x) = 0.$$

Ролль образует каскады так же, как коэффициенты разложения $f(x+z)$ по степеням z , — это давало частный случай (для целого многочлена) разло-жения, впоследствии полученного Тейлором.

Отделение корней основано у Ролля на предложении: между двумя последовательными действительными корнями k -го каскада лежит не более одного действительного корня $(k+1)$ -го каскада, так что между двумя соседними корнями $f'(x)$ имеется не более одного корня $f(x)$. Обоснование своего метода Ролль опубликовал в книге «Доказательство одного метода решения уравнений всех степеней...» (Démonstration d'une méthode pour résoudre les égalités de tous les degrés, Paris, 1691). В ходе обоснования этого предложения он получил результат, из которого сразу следует теорема, носящая теперь в учебниках анализа его имя: между двумя последовательными действительными корнями дифференцируемой функции лежит по крайней мере один корень производной. Ролль вывел свой результат чисто алгебраически для целого многочлена, впоследствии он был распространен средствами анализа на дифференцируемые функции¹.

Приближенное решение уравнений

В связи с рассмотрением границ действительных корней Ньютон касается во «Всеобщей арифметике» и вопроса об их приближении. Так, он замечает, что степенные суммы S_{2n} позволяют найти не только верхнюю границу таких корней, но и наиболее удаленный от нуля корень, который по абсолютной величине равен пределу $\sqrt[2n]{S_{2n}}$ при $n \rightarrow \infty$ (слово «предел» здесь не употребляется). Для определения двух-трех первых цифр корня Ньютон рекомендует геометрическое построение. Общего приема вычисления корней во «Всеобщей арифметике» нет, но во время ее составления Ньютон им уже располагал.

Прием, известный в настоящее время под именем метода Ньютона или же метода Ньютона — Рафсона, Ньютон впервые подробно изложил в «Анализе с помощью уравнений с бесконечным числом членов» (Analysis per aequationes numero terminorum infinitas), написанном не позднее 1669 г. и тогда же прочитанном в рукописи несколькими английскими математиками, но опубликованном более чем сорок лет спустя (Лондон, 1711). О том же методе Ньютон сообщил 13 июня 1676 г. Лейбницу в письме, пересланном через секретаря Королевского общества Ольденбурга. В печати метод был обнародован в 94-й главе «Алгебры» Валлиса (1685).

В письме к Лейбницу Ньютон подчеркивает преимущества своего метода перед родственным, но более громоздким приемом Виета (т. I, стр. 313). Основная идея состоит в том, что малый корень нелинейного уравнения $\varphi(x) = 0$ можно приближенно найти из линейного уравнения, получающегося, если в данном уравнении отбросить по их сравнительной малости все члены, начиная со второй степени. Тогда, если для корня какого-либо данного уравнения $f(x) = 0$ известно приближение x_0 , так что $x = x_0 + p$, где p — малое число, то уравнение $f(x) = f(x_0 + p) = f_1(p) = 0$ заменяется уравнением $f_1(p) = 0$ с малым корнем p и p_0 , приближенное значение p находится с помощью линеаризации уравнения $f_1(p) = 0$. После этого полагается $p = p_0 + q$ и приближенное значение q_0 для q отыскивается путем линеаризации уравнения $f_1(p_0 + q) = f_2(q) = 0$ и т. д. Так возникает цепочка уравнений $f_1(p)$, $f_2(q)$, $f_3(r)$, ..., а последовательные поправки $p_0, q_0, r_0, \dots$ вычисляются всякий раз из соответствующих линейных

¹ У самого Ролля доказывается, что значения производной для двух соседних (однократных) корней целого многочлена имеют различные знаки

уравнений. Во вспомогательных уравнениях $f_{k-1} = 0$ бывает можно, с соблюдением осторожности, отбрасывать для простоты некоторые старшие члены и до преобразования в $f_k = 0$. Для образца Ньютон привел уравнение

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

и, отправляясь от $x_0 = 2$, вычислил три поправки, дающие значение корня с восемью верными цифрами после десятичной запятой: $x = 2 + 0,1 - 0,0054 = 2,09455147$. Метод приводит к представлению корня в виде бесконечной десятичной дроби. Последующие авторы пользовались для иллюстрации тем же примером множество раз, в том числе при сравнении силы различных методов.

Последователь Ньютон, член Королевского общества Джозеф Рафсон (1648—1715) придал методу несколько иной вид, вычисляя последовательные приближения корня $x_1, x_2, x_3, \dots$ по одной и той же формуле и обходясь без последовательных уравнений $f_2 = 0, f_3 = 0, \dots$ для вычисления поправок. Именно, получив посредством линеаризации для уравнения

$$f(x) = f(x_0 + p) = f(x_0) + f'(x_0)p + \frac{f''(x_0)}{2}p^2 + \dots = 0$$

первую поправку

$$p_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

Рафсон вслед затем использует приближенное значение корня

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

точно так же, как x_0 , т. е. образует

$$f(x_1 + q) = 0,$$

что позволяет аналогично найти

$$q_0 = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \text{ и } x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Вообще приближения вычисляются по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Здесь функция $f'(x)$, стоящая в знаменателе поправки, есть производная функции $f(x)$. Рафсон изложил свою модификацию приема в «Общем анализе уравнений» (*Analysis aequationum universalis*, Londini, 1690). Именно в такой форме метод применяется до сих пор, притом не только для алгебраических, но и для трансцендентных уравнений. Сам Рафсон имел в виду только алгебраический случай, а мы записали все в наших современных обозначениях. Ни Ньютон, ни Рафсон не провели исследования условий применимости метода; лишь в указанном примере Ньютон осторожно замечает, что исходное приближение разнится от истинного корня менее чем на 0,1, а затем предупреждает, что вообще это приближение должно быть достаточным. В случае сомнения он советует находить поправку p_0 не из линейного уравнения $10p - 1 = 0$, а из квадратного $6p^2 + 10p - 1 = 0$

x^4	x^4y	x^4y^2	x^4y^3	x^4y^4	x^4y^5	x^4y^6
x^3	x^3y	x^3y^2	x^3y^3	x^3y^4	x^3y^5	x^3y^6
x^2	x^2y	x^2y^2	x^2y^3	x^2y^4	x^2y^5	x^2y^6
x	xy	xy^2	xy^3	xy^4	xy^5	xy^6
1	y	y^2	y^3	y^4	y^5	y^6

Рис. 3

(т. е. отбрасывая во вспомогательных уравнениях лишь члены выше второй степени). Эту мысль подробнее развил Э. Галлей (*Philosophical Transactions*, 1694).

Итерационный метод Ньютона — Рафсона породил обширную литературу. Л. Эйлер в 1744 г. (в письме к Гольдбаху) и в 1755 г. (в курсе дифференциального исчисления) дал вывод метода Ньютона — Рафсона с помощью ряда Тейлора, пригодный и в случае трансцендентных уравнений. Приближения $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ не всегда сходятся к истинному корню. На это обращалось внимание неоднократно, начиная с самого Ньютона. Как можно действительно обеспечить сходимость, показал марсельский математик, в годы Французской революции бывший одно время городским мэром, Ж. Р. Муррайль в «Трактате об общем решении уравнений» (*Traité de la résolution des équations en général*, Marseille — Paris, 1768). Детальный анализ метода принадлежит Ж. Б. Фурье (опубликовано посмертно в 1831 г.).

Ньютон распространил свой прием и на буквенные уравнения, разлагая неявные функции y , заданные целым алгебраическим многочленным уравнением с буквенными коэффициентами $f(x, y) = 0$, в бесконечные ряды по степеням аргумента x , т. е. в окрестности $x = 0$, причем не только по натуральным степеням, но также по дробным и отрицательным. Для определения первого члена разложения, представляющего особенную трудность, Ньютон предложил механическое правило, опирающееся на расположение членов данного уравнения в клетках прямоугольной сетки. Впоследствии стали говорить о «методе параллелограмма» Ньютона.

Свое правило Ньютон разъяснил в письме к Лейбницу от 24 октября 1676 г; оно содержится также в 94-й главе «Алгебры» Валлиса (1685). Прямоугольник ВАС разделяется перпендикулярами к сторонам на равные прямоугольные клетки, соответствующие произведениям вида $x^m y^n$, как показано на рис. 3. Клетки, соответствующие членам данного уравнения $f(x, y) = 0$, помечаются звездочкой, и затем линейка, приложенная в углу нижней помеченной клетки левого столбца, вращается против часовой стрелки, пока не коснется какой-либо другой отмеченной клетки. Члены данного уравнения, соответствующие клеткам, прилегающим к линейке, образуют вспомогательное уравнение для отыскания первого члена разложения.

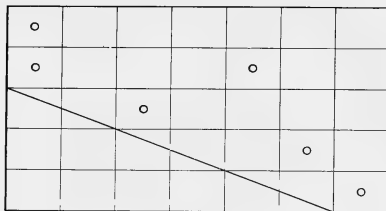


Рис. 4

Так, в случае уравнения

$$y^6 - 5xy^5 + \frac{x^3}{a}y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0$$

Ньютон получил (рис. 4) вспомогательное уравнение

$$y^6 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 = 0$$

или, заменяя y на $v\sqrt{ax}$, уравнение

$$v^6 - 7v^2 + 6 = 0,$$

так что y имеет четыре значения: $\pm\sqrt{ax}, \pm\sqrt{2ax}$ (еще два корня последнего уравнения — мнимые). За первый член результата можно принять любое из них. В предшествующем письме к Лейбницу от 13 июня 1676 г. Ньютон привел — без объяснений — решение уравнения

$$y^3 + axy + a^2y - x^3 - 2a^3 = 0,$$

(этот пример рассмотрен и в «Анализе с помощью уравнений с бесконечным числом членов»). Здесь вспомогательное уравнение — $2a^3 + a^2y + y^3 = 0$ дает для y приближение a , после чего Ньютон вводит новое переменное $y = a + p$, затем, найдя для p приближение $x/4$, полагает $p = \frac{x}{4} + q$ и т. д., так что в конце концов

$$y = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2} + \dots$$

Обоснования описанной схемы Ньютон не сообщил; несомненно, что он пришел к ней аналитическим путем, подставляя в уравнение $f(x, y) = 0$ искомое разложение $y = rx^s + r_1x^{s_1} + \dots$ ($s_1 > s$) и подбирая y так, чтобы результирующее выражение было тождественно равно нулю; при этом наименьшая степень x должна иметься по крайней мере в двух членах выражения. Как видно, Ньютон, указав, что для искомого первого члена разложения может получиться несколько различных значений; но он не рассмотрел общим образом вопрос о числе разложений в окрестности рассматриваемого значения $x = 0$, так же как и проблему сходимости возникающих рядов.

В XVIII в. Дж. Стирлинг (1717), Ж. П. де Гюа де Малъв (1740) и Г. Крамер (1750) применили «параллелограмм Ньютона» к изучению поведения высших алгебраических кривых в соседстве с особыми точками, их бесконечных ветвей и асимптот; Ж. Л. Лагранж дал чисто аналитическое изложение метода (1776). Но все значение «параллелограмма Ньютона» выяснилось только в XIX в. при построении методами функций комплексного переменного теории алгебраических функций и их интегралов. Здесь прием Ньютона широко использовал В. Кюизе (1850), исследуя свойства многозначных алгебраических функций вблизи критических точек, причем он впервые рассмотрел вопрос о сходимости получаемых при этом обобщенных степенных рядов. Сказанным не ограничиваются приложения «параллелограмма Ньютона». Он нашел важные применения в теории дифференциальных уравнений (в частности, при отыскании рациональных интегралов линейных уравнений) и в теории алгебраических чисел (разложение корней алгебраических уравнений в так называемые p -адические ряды и исследование неприводимости уравнений) и т. д. Н. В. Бугаев распространил метод на системы n уравнений с $n + 1$ переменными (1888); Д. М. Синцов дал геометрическое его изложение при $n = 2$ (1898). Добавим, что с помощью метода Ньютона были получены упомянутые ранее результаты Н. Г. Чеботарева, относящиеся к задаче о квадратируемых дугочках (см. т. I, стр. 85).

Приближенные вычисления, в частности итерационные приемы, приводят, вообще говоря, к проблемам математики бесконечного. Метод Ньютона дает выражение как численных, так и буквенных корней уравнений в виде бесконечных рядов, к истории которых в XVII в. мы еще вернемся далее.

Проблема решения уравнений в радикалах

После успешного решения в радикалах уравнений третьей и четвертой степеней велись поиски аналогичного решения уравнений высших степеней. Этой задачей занимались многие, в том числе Лейбниц, а также его друг Эренфрид Вальтер фон Чирнгауз (1651—1708), саксонский дворянин, предки которого проживали в северной Богемии (Чехии), где носили имя Черноус. Разносторонний любитель наук, Чирнгауз занимался физикой, математикой, философией, а наряду с этим многое сделал для развития в Саксонии производства оптического стекла и фарфора. В 1683 г. он опубликовал в «Acta Eruditorum» известное под его именем преобразование алгебраического уравнения в уравнение той же степени, но с меньшим числом членов. Правила удаления второго члена кубического уравнения с помощью линейной подстановки $x = y + h$ знали еще итальянские алгебраисты XVI в., а Декарт распространил его на уравнения любой степени. Преобразование Чирнгауза состоит в том, что сначала из данного уравнения

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (1)$$

и уравнения с неопределенными коэффициентами

$$y = b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + \dots + b_{n-1}$$

исключается x . Чирнгауз считал, что в возникающем при этом уравнении

$$y^n + c_1 y^{n-1} + c_2 y^{n-2} + \dots + c_n = 0$$

можно выбрать постоянные b_k , от которых зависят c_i , так, чтобы $c_1 = c_2 = \dots = c_{n-1} = 0$. Если бы это было так, то последнее уравнение приняло бы вид

$$y^n + c_n = 0$$

и уравнение (1) можно было бы решить в радикалах. Для $n = 3$ Чирнгаузу это действительно удалось, и тем самым он нашел новый способ решения кубического уравнения.

На самом деле, уверенность Чирнгауза в том, что его метод ведет к цели, в общем случае была неосновательной. Еще Лейбниц, которому он письменно сообщил свою идею в 1677 г., ответил ему, что, по его мнению, прием Чирнгауза не проходит уже для уравнений пятой степени, кроме частных случаев. Впрочем, Лейбниц также полагал, что уравнения выше четвертой степени разрешимы в радикалах. Тем не менее преобразование Чирнгауза имеет важное значение, и с его помощью в последующем были получены замечательные результаты в изучении уравнений пятой и высших степеней.

Отметим в данной связи, что на рубеже XVII и XVIII вв. продвинулось изучение двучленного уравнения $x^n + a = 0$. Ролль указал (1690), что всякий корень n -й степени имеет ровно n значений, из которых при n нечетном $n - 1$ мнимых, а при n четном либо все мнимые ($a > 0$), либо имеется два действительных ($a < 0$). Конкретное представление корня n -й степени из данного числа нашел в серии работ, печатавшихся с 1707 г., А. Муавр, имя которого носит знаменитая формула теории функций комплексного переменного, со времени Эйлера (1748) записываемая в виде

$$\sqrt[n]{\cos n\varphi \pm \sqrt{-1} \sin n\varphi} = \cos \varphi \pm \sqrt{-1} \sin \varphi.$$

Мы вернемся к этому открытию Муавра в III томе.

Определители

Мы закончим обзор успехов алгебры открытием Лейбница, указавшим новые пути в развитии всей линейной алгебры. Именно, в письме к Лопиталю от 28 апреля 1693 г. Лейбниц, используя своеобразную двойную индексацию¹, ввел, в сущности, понятие об определителе системы линейных уравнений. Он рассматривает вопрос о разрешимости (совместности) системы $n + 1$ уравнений с n неизвестными на примере системы

$$a_{10} + a_{11}x + a_{12}y = 0,$$

$$a_{20} + a_{21}x + a_{22}y = 0,$$

$$a_{30} + a_{31}x + a_{32}y = 0,$$

которую пишет в виде

$$10 + 11x + 12y = 0,$$

$$20 + 21x + 22y = 0,$$

$$30 + 31x + 32y = 0.$$

¹ Схоотен пользовался в 1649 г. простыми индексами вроде C , $2C$, $3C$, и Лейбниц последовал в этом за ним еще в 1676 г., причем стал писать цифры поменьше, вроде ${}_1B$, ${}_2B$, ${}_3B$; оба они обозначали таким образом точки на чертежах. Порядок букв и индексов Ньютон обратил (в печати — 1711 г.).

Условие разрешимости он выражает путем исключения неизвестных в виде

$$\begin{array}{cc} 1_0 \cdot 2_1 \cdot 3_2 & 1_0 \cdot 2_2 \cdot 3_1 \\ 1_1 \cdot 2_2 \cdot 3_0 & = 1_1 \cdot 2_0 \cdot 3_2 \\ 1_2 \cdot 2_0 \cdot 3_1 & 1_2 \cdot 2_1 \cdot 3_0 \end{array}$$

Различие в записи коэффициентов (10 или 1_0 и т. п.) воспроизводит известные нам издания сочинений Лейбница. Мы бы записали этот результат, следуя Кэли (1841), так:

$$\begin{vmatrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0.$$

Не ограничившись этим примером, Лейбниц указал общее правило составления членов результата и определения их знаков. При этом со свойственной ему высокой оценкой символики он писал: «Часть секрета анализа состоит в искусстве хорошо употреблять применяемые знаки, и по этому малому образцу Вы видите, сударь, что Виет и Декарт еще не познали все его тайны»¹. И Лейбниц подчеркивал, что, как видно, усовершенствование алгебры зависит от комбинаторики.

Лейбниц не знал, что в это же время (1683) японский математик Кова Секи (1642—1708) также пришел к методу определителей, развив древне-китайский метод фан-чен (см. т. I, стр. 165).

Изложенные открытия Лейбница не получили тогда распространения, и метод определителей был вновь разработан в середине XVIII в., прежде всего Г. Крамером (1750).

¹ Г.-В. Лейбниц. Избранные отрывки из математических сочинений. Составил и перевел А. П. Юшкевич. УМН, 1948, т. 3, вып. 1(23), стр. 198.

ТРЕТЬЯ ГЛАВА

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СРЕДСТВА ВЫЧИСЛЕНИЙ

Открытие логарифмов

На всем протяжении XVI в. быстро возрастало количество приближенных вычислений, прежде всего в астрономии. С совершенствованием инструментов увеличивалась точность наблюдений, а вместе с нею и объем тригонометрических таблиц. Исследование планетных движений, необходимое для разработки новой системы Вселенной, требовало колоссальных расчетов. Выкладки Кеплера при установлении подлинной орбиты Марса стоили ему многих лет напряженного труда. Астрономам грозила реальная опасность утонуть в невыполнимых расчетах. Трудности возникали и в других областях; в финансовом и страховом деле нужны были, например, таблицы сложных процентов для различных значений процента и т. д. Главную трудность представляли умножение и деление многозначных чисел, особенно же тригонометрических величин.

С целью привести умножение к более легким сложению и вычитанию иногда пользовались таблицами синусов и косинусов согласно правилам

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos (a - b) - \cos (a + b)],$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos (a - b) + \cos (a + b)].$$

Была составлена таблица квадратов до 100 000, с помощью которой умножение можно было производить по правилу

$$ab = \frac{1}{4} [(a + b)^2 - (a - b)^2].$$

Однако ни тот, ни другой прием не давали удовлетворительного решения вопроса. Его принесли с собой таблицы логарифмов.

Открытие логарифмов опиралось на хорошо известные к концу XVI в. свойства прогрессий. Связь между членами геометрической прогрессии $q, q^2, q^3, \dots$ и арифметической прогрессией их показателей $1, 2, 3, \dots$ не раз отмечалась математиками, о ней говорилось еще в «Псаммите» Архимеда. Другой предпосылкой было распространение понятия степени на отрицательные и дробные показатели, позволившее перенести только что упомянутую связь на более общий случай. Мы знаем (т. I, стр. 307), что Штифель сопоставлял прогрессии

$$\dots, q^{-3}, q^{-2}, q^{-1}, 1, q, q^2, q^3, \dots$$

Он же и многие другие авторы указывали, что умножению, делению, возведению в степень и извлечению корня в геометрической прогрессии соответствуют в арифметической — в том же порядке — сложение, вычитание, умножение и деление. Здесь уже скрывалась идея логарифма числа как показателя степени, в которую нужно возвести данное основание q , чтобы получить это число. Оставалось перенести знакомые свойства прогрессии с общим членом q^n на любые действительные показатели. Это дало бы непрерывную показательную функцию q^x , принимающую любые положительные значения, а также обратную ей логарифмическую. Но эту идею глубокого принципиального значения удалось развить через несколько десятков лет. Сам Штифель ограничился сообщением сделанных им наблюдений. Он писал: «Тут можно было бы написать целую новую книгу об удивительных свойствах чисел, но я должен здесь остановиться и пройти мимо с закрытыми глазами»¹.

Логарифмы были изобретены независимо друг от друга Непером, и лет на десять позднее Бюрги. Оба хотели дать новое удобное средство арифметических вычислений, но подошли к своей задаче по-разному. Непер кинематически выразил логарифмическую функцию и по существу вступил в почти неизведанную область теории функций. Бюрги остался на почве рассмотрения дискретных прогрессий. Впрочем, у обоих определения логарифма не похожи на современное. Мы начнем с более элементарной теории Бюрги.

Логарифмы Бюрги

Швейцарец Иост Бюрги (1552—1632) был высококвалифицированным механиком и часовых дел мастером, математику он изучил самостоятельно. Он состоял придворным часовщиком, а также мастером астрономических инструментов сначала в Касселе, затем с 1603 г. в Праге, где сблизился с Кеплером. Мы не знаем, когда в точности Бюрги приступил к созданию своих таблиц, но, вероятно, они были готовы около 1610 г. Бюрги долго медлил с их изданием, и они вышли в свет уже после двух трудов Непера; за эту задержку Кеплер впоследствии порицал своего друга. Книга Бюрги озаглавлена «Таблицы арифметической и геометрической прогрессий, вместе с основательным наставлением, как их нужно понимать и с пользой применять во всяческих вычислениях» (*Arithmetische und geometrische Progress — Tabulen, sambt gründlichen Unterricht, wie solche nützlich in allerley Rechnungen zu gebrauchen und verstanden werden sol*, Prag, 1620). На самом деле упомянутое «наставление» долго оставалось неизвестным; оно было обнаружено и опубликовано лишь в 1856 г.

Бюрги — об этом он писал сам — исходил из соображений о соответствии между умножением в геометрической прогрессии и сложением в арифметической, которые он почерпнул, правда, не у Штифеля (так как не знал латыни), а у других космических авторов, писавших по-немецки. Задача состояла в выборе прогрессии со знаменателем, достаточно близким к еди-

¹ *M. Stifel. Arithmetica integra, Norimbergi, 1544, л. 249 об.*

нице, с тем чтобы ее члены следовали друг за другом с интервалами, достаточно малыми для практических вычислений. Бюрги взял знаменатель 1,0001 и сопоставил числа 0, 10, 20, ..., 10*n*, ... арифметической прогрессии с членами геометрической 10000000, 100010000, 100020001, ..., $10^8 \cdot 1,0001^n$, ... Первые числа, напечатанные красной краской, называются красными, вторые напечатаны черной краской и называются черными. Красные числа являются логарифмами черных, разделенных на 10^8 , при основании $\sqrt[10]{1,0001}$. Множитель 10^8 введен для того, чтобы по возможности долго избегать дробей. Так как таблицы расположены по красным числам, то они представляют собой таблицы антилогарифмов (термин, введенный в этом смысле Валлисом, 1693). Поэтому для умножения и деления черных чисел чаще всего нужна интерполяция. Вычислены черные числа с девятью верными цифрами.

Красные числа следуют с интервалом в десять, за одним исключением. Таблица черных чисел начинается с 10^8 , и Бюрги заканчивает ее черным числом 10^8 , для которого с помощью интерполяции вычисляет «полное красное число» 230270,022. Это число применяется при делении a/b , когда $a < b$, подобно тому как в десятичных логарифмах добавляется целая характеристика, чтобы избежать отрицательной мантиссы. Именно, вместо a/b Бюрги в этом случае находит $\frac{a \cdot 10^8}{b}$: он складывает красные числа, соответствующие a и 10^8 , вычитает из суммы красное число, соответствующее b , и по результату находит черное число с девятью десятичными знаками, дающее дробь a/b . Если $a > b$, Бюрги вычитает из красного числа для a красное число для b и находит черное число, соответствующее результату; полученное число дает восемь десятичных знаков дроби a/b .

Таблицы Бюрги не получили значительного распространения. Они не могли конкурировать с таблицами Непера, более удобными и к тому же к 1620 г. уже широко известными.

Логарифмы Непера

Первым изобретателем логарифмов был шотландский барон Джон Непер (1550—1617). Непер, после завершения образования в Эдинбурге и путешествия по Германии, Франции и Испании, в возрасте двадцати одного года навсегда поселился в семейном поместье близ Эдинбурга. Здесь в сельской тиши он занялся главным образом богословием и математикой, которую изучил по сочинениям Евклида, Архимеда, Региомонтана, Коперника и других ученых, среди них, быть может, Штифеля. В 1593 г. Непер, страстный противник католицизма, выпустил написанное в стиле геометрического трактата сочинение против римской церкви, доказывая в нем, что папа есть антихрист. Эта книжка доставила автору в XVII в. гораздо большую известность, чем его математические труды. Непер увлекался и астрологией.

К открытию логарифмов Непер пришел не позднее 1594 г., но лишь двадцать лет спустя опубликовал свое «Описание удивительной таблицы логарифмов» (*Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, Edinburgi, 1614), содержащее определение неперовых логарифмов, их свойства и таблицы логарифмов синусов и косинусов от 0 до 90° с интервалом в $1'$, а также разности этих логарифмов, дающие логарифмы тангенсов. Теоретические выводы и объяснения способа вычисления таблицы он изложил в другом труде,



Джон Непер
(с портрета, хранящегося в Эдинбурге)

подготовленном, вероятно, до «Описания», но изданном посмертно, в «Построении удивительной таблицы логарифмов» (*Mirifici logarithmorum canonis constructio*, Edinburgi, 1619). Упомянем, что в обоих сочинениях Непер рассматривает и некоторые вопросы тригонометрии. Особенно известны удобные для логарифмирования «аналогии», т. е. пропорции Непера, применяемые при решении сферических треугольников по двум сторонам и углу между ними, а также по двум углам и прилежащей к ним стороне.

В отличие от Бюрги, сопоставившего две дискретные прогрессии, Непер с самого начала вводил понятие логарифма для всех значений непрерывно меняющихся тригонометрических величин — синуса и косинуса. При тогдашнем состоянии математики, когда еще не было аналитического аппарата исчисления бесконечно малых, естественным и единственным средством для этого являлось кинематическое определение логарифма. Быть может, здесь не остались без влияния и традиции, восходившие к оксфордской школе XIV в. Мы приведем исходные определения из «Описания»:

«О п р. 1. Говорят, что линия растёт равномерно, когда описывающая её точка проходит в равные моменты равные промежутки. — О п р. 2. Говорят, что линия сокращается пропорционально, когда пробегающая по ней точка в равные моменты отсекает отрезки, сохраняющие постоянно одно и то же отношение к тем линиям, от которых они отсекаются. — О п р. 3. Говорят, что количества иррациональные, или невыразимые числом, определяются числами с наибольшим приближением, когда они определяются большими числами, отличающимися от истинных значений иррациональных количеств меньше, чем на единицу. — О п р. 4. Синхронными движениями называются те, которые происходят вместе и в течение одного и того же

Страница из «Описания удивительной таблицы логарифмов» Непера
(Эдинбург, 1614)

Gr. 9		+ —			
9 min	Smus	Logarithmi	Differentia	logarithmi	Sinus
0	1564345	18551174	18427293	123881	9876883
1	1567218	18532826	18408484	124342	9876427
2	1570095	18514511	18389707	124804	9875971
3	1572964	18496231	18370964	125267	9875514
4	1575837	18477984	18352253	125731	9875056
5	1578709	18459772	18333576	126196	9874597
6	1581581	18441594	18314933	126661	9874137
7	1584453	18423451	18296324	127127	9873677
8	1587325	18405341	18277747	127594	9873216
9	1590197	18387265	18259203	128062	9872754
10	1593069	18369223	18240692	128531	9872291
11	1595941	18351214	18222213	129001	9871827
12	1598812	18333237	18203765	129472	9871362
13	1601684	18315294	18185351	129943	9870897
14	1604555	18297384	18166969	130415	9870431
15	1607426	18279507	18148619	130888	9869964
16	1610297	18261663	18130301	131362	9869496
17	1613168	18243851	18112014	131837	9869027
18	1616038	18226071	18093758	132313	9868557
19	1618909	18208323	18075533	132790	9868087
20	1621779	18190606	18057318	133268	9867616
21	1624649	18172924	18039177	133747	9867144
22	1627519	18155273	18021047	134226	9866671
23	1630389	18137654	18002948	134706	9866197
24	1633259	18120067	17984880	135187	9865722
25	1636129	18102511	17966842	135669	9865246
26	1638999	18084987	17948835	136152	9864770
27	1641868	18067495	17930859	136636	9864293
28	1644737	18050034	17912913	137121	9863815
29	1647607	18032604	17894997	137607	9863336
30	1650476	18015207	17877114	138093	9862856
					Gr. 30

80

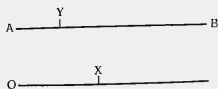


Рис. 5

времени. — О п р. 5 и п о с т у л а т. Так как существуют движения как более медленные, так и более быстрые, чем всякое данное движение, то отсюда необходимо следует, что существует движение равнобыстрое всякому данному (которое мы определяем как движение ни более медленное, ни более быстрое, чем данное). — О п р. 6. Логарифмом всякого синуса называется, наконец, число, определяющее с наибольшим приближением линию, возрастающую равномерно, между тем как линия полного синуса убывает пропорционально до величины данного синуса, причем оба движения синхронны и вначале равнобыстры»¹.

Здесь в геометрическом выражении высказаны многие замечательные идеи, подробный разбор которых увел бы нас далеко. Мы отметим только своеобразную формулировку идеи о непрерывности в третьем определении и обратимся к основному, шестому определению логарифма.

Если изобразить полный синус, т. е. радиус круга, у Непера равный 10^7 , отрезком AB , а линию синуса — отрезком $YB = y$ (рис. 5), то логарифмом y (обозначим его Ly) будет отрезок $OX = x$, проходимый точкой X , начинающей движение из O с постоянной скоростью v_0 , за то самое время, в какое точка Y , одновременно выходящая из A с той же начальной скоростью v_0 , проходит отрезок AY со скоростью, пропорциональной расстоянию, остающемуся до другого конца B , т. е. пропорциональной YB . На языке дифференциального исчисления

$$\frac{dx}{dt} = v_0, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{-v_0 y}{10^7},$$

т. е.

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{10^7},$$

и, учитывая, что $y = 10^7$ при $x = 0$,

$$x = Ly = -10^7 \ln \frac{y}{10^7} = -10^7 \ln y + 10^7 \ln 10^7.$$

Как видно, неперов логарифм числа y не есть, как иногда пишут в учебниках анализа, натуральный логарифм этого числа: Ly выражается через $\ln y$ линейно. Многие свойства логарифмов Непера поэтому несколько отличаются от свойств логарифмов в нашем смысле слова. Главное, конечно, у них общее: если четыре числа образуют геометрическую пропорцию $y_1 : y_2 = y_3 : y_4$, то их логарифмы составляют арифметическую пропорцию $Ly_1 - Ly_2 = Ly_3 - Ly_4$, т. е. геометрической прогрессии чисел соответ-

¹ Цит. по замечанию И. Ю. Тимченко к книге Ф. Каджори. История элементарной математики. Перевод И. Ю. Тимченко. Одесса, 1917, стр. 439—440.

ует арифметическая прогрессия логарифмов. Однако, поскольку $L1 = 10^7 \ln 10^7$, т. е. $L1$ не равен нулю, правила действий усложняются: так, например,

$$L(ab) = La + Lb - L1, \quad L \frac{a}{b} = La - Lb + L1$$

и т. п. В примерах Непера, правда, $L1$ выпадает, но лишь потому, что в них вычисляются четвертая и средняя пропорциональные, например:

$$L \frac{ab}{c} = L(ab) - Lc + L1 = La + Lb - Lc.$$

Нулю равен неперов логарифм числа 10^7 , т. е. полного синуса или радиуса. Этого и добивался Непер, имевший в виду прежде всего тригонометрические вычисления. Поскольку тригонометрические величины рассматривались еще не в отношении к радиусу, а как отрезки, выраженные в тех же единицах, что полный синус, последний входил в формулы и на него часто приходилось умножать и делить. Равенство нулю логарифма полного синуса представляло в таких условиях определенные преимущества. По мере уменьшения натуральных значений синуса неперов логарифм возрастает, а при синусе, равном нулю, обращается в бесконечность. В таблице Непера в строке, в которой в графе синуса обозначен 0, в графе логарифма синуса стоит слово *Infinitem* — «бесконечность».

Разумеется, Непер не записывал и не интегрировал приведенное выше дифференциальное уравнение, которое выражает кинематическое определение логарифма. Но фактически его прием составления таблиц равносильен приближенному численному решению дифференциального уравнения. Сначала находится весьма малый отрезок, проходимый точкой X , когда точка Y перемещается из начального положения A на расстояние 1, т. е. вычисляется $L9999999$. Опираясь на представление о мгновенной скорости и сравнивая скорости точек X и Y , Непер выводит, что

$$10^7 - y < Ly < \frac{10^7}{y} (10^7 - y)$$

и для $y = 9999999$ принимает в качестве логарифма среднее арифметическое чисел 1 и $\frac{10^7}{9999999} = 1,00000010000001\dots$, так что $L9999999 = 1,00000005$ (с точностью до четырнадцатого знака). Здесь, как и всюду, Непер пользуется десятичными дробями. Далее для арифметической прогрессии логарифмов $x_n = 1,00000005n$ он находит соответствующую геометрическую прогрессию чисел

$$y_n = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^8}\right)^n, \quad \text{где } n = 1, 2, 3, \dots, 100.$$

Это нетрудно, так как здесь нужны только вычитания; $y_k = y_{k-1} - 0,00000001 y_{k-1}$. Так получается, при подходящих округлениях, $L99999900$. Отношение числа 99999900 к 10^7 есть $1 - \frac{1}{10^8}$, и Непер переходит к вычислению логарифмов чисел $y'_n = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^8}\right)^n$ до $n = 50$, причем логарифм y'_i уже известен. Аналогично применяются прогрессии $10^7 \left(1 - \frac{1}{2 \cdot 10^8}\right)^n$

и в особенно большом объеме $10^7 \left(1 - \frac{1}{10^2}\right)^n$. Числа y_n по мере надобности округляются, и с помощью оценки разности логарифмов близких чисел, основанной на приведенном выше неравенстве, вычисляются их логарифмы. Так Непер доходит до $L5000000$; дальнейшие выкладки не столь интересны.

Прием Непера в принципе совершенно правилен. Однако в его расчеты, вообще исключительно тщательные, на второй описанной стадии вкратца ошибка при вычислении y_{50} . В результате восьмизначные логарифмы Непера должны быть увеличены примерно на $\frac{3}{8} \cdot 10^{-6}$ их величины. Например, для $L5000000 = 10^7 \ln 2$ он нашел $6931469,22$ вместо $6931471,805599$.

Мы уже подчеркнули, что логарифмы Непера не следует смешивать с натуральными. Если переписать зависимость между теми и другими в виде $\frac{Ly}{10^7} = \log_{1/e} \frac{y}{10^7}$, то можно сказать что неперовым логарифмам соответствуют логарифмы с основанием $1/e$, вернее, в силу указанной неточности, с

основанием $1/e'$, весьма близким к $1/e$, $e^{1 - \frac{3}{8} \cdot 10^{-6}} \approx e$. Однако в системе Непера, как и у Бюрги, не было, строго говоря, основания логарифмов, поскольку логарифм единицы отличается от нуля. И позднее, когда уже давно перешли к десятичным и натуральным логарифмам, отнюдь не сразу было сформулировано определение логарифма, как показателя степени данного основания. Такое понимание логарифмов высказывали Валлис (1685), И. Бернулли (1694) и другие, и оно, как мы увидим, не было чуждо и самому Неперу. В руководствах оно появляется впервые, вероятно, у В. Гардинера (Tables of Logarithms, London, 1742). Впрочем, сам Гарднер использовал при этом бумаги преподавателя математики В. Джонса (1675—1749), который первый обозначил отношение окружности к диаметру буквой π (1706). Широкому распространению обыкновенного теперь определения логарифма более других содействовал Эйлер, который применил в этой связи и термин «основание».

Термин «логарифм» (logarithmus) принадлежит Неперу, он возник из сочетания греческих слов $\lambda\acute{o}\gamma\omicron\varsigma$ — отношение и число — $\acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$, которое означало «число отношения» ($\lambda\omicron\gamma\omicron\upsilon \acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$), что напоминает о двойных, тройных, полудторных и иных целых или дробных отношениях древней и средневековой математики. Первоначально Непер пользовался другим термином: *numeri artificiales* — «искусственные числа» — в противоположность *numeri naturales* — «числам естественным».

Десятичные логарифмы

Таблицы Непера, приспособленные к тригонометрическим вычислениям, были неудобны для действий с данными числами. Во-первых, таблицы были расположены по значениям синусов от 0 до 90° и косинусов, а не по натуральному ряду чисел. Во-вторых, при действиях с числами по таблицам Непера приходилось еще оперировать с $L1$. Чтобы устранить эти недостатки, Непер предложил составить таблицы логарифмов, приняв за логарифм единицы нуль, а за логарифм десяти 10^{10} , или, что сводится к тому же, просто единицу. Это предложение он сделал в ходе обсуждения с посетившим его в 1615 г. профессором математики Грешем Колледжа в Лондоне Генри Бригсом (1561—1631), который и сам задумывался, как

усовершенствовать таблицы логарифмов. Заняться осуществлением своего плана Непер не мог из-за пошатнувшегося здоровья, но указал идею двух вычислительных приемов, развитых далее Бригсом.

Бригс опубликовал первые результаты своих кропотливых вычислений — «Первую тысячу логарифмов» (*Logarithmorum chilias prima*, Londini, 1617) в год смерти Непера. Здесь даны были десятичные логарифмы чисел от 1 до 1000 с четырнадцатью знаками. Позднее, будучи профессором в Оксфорде, он выпустил «Логарифмическую арифметику» (*Arithmetica logarithmica*, Londini, 1624), содержащую четырнадцатизначные логарифмы чисел от 1 до 20 000 и от 90 000 до 100 000. Оставшийся пробел был восполнен голландским книготорговцем и любителем математики Андрианом Флакком (1600—1667), опубликовавшим как второе издание труда Бригса и под тем же названием (Гауда, 1628) десятизначные таблицы от 1 до 100 000 вместе с такими же логарифмами всех шести тригонометрических линий через одну минуту.

Несколько ранее семизначные десятичные таблицы логарифмов синусов и тангенсов вычислил коллега Бригса по Грешем Колледжу, воспитанник Оксфордского университета Эдмунд Гунтер (1581—1626), опубликовавший их в «Своде треугольников» (*Canon triangulorum*, Londini, 1620). Имя Гунтера, который, между прочим, ввел слова косинус и котангенс, нам еще встретится в связи с изобретением логарифмической линейки.

Таблицы Флакка легли в основу всех последующих, причем в них было внесено немало структурных изменений и поправок: у Флакка имелось еще 173 ошибки в первых семи знаках, а всего более 600. Избавиться от ошибок оказалось нелегким делом. Еще в известных таблицах уроженца Словении Георга Вега (1754—1802), впервые напечатанных в Вене в 1783 г. и многократно переиздававшихся вплоть до наших дней, было пять ошибок. Первые безошибочные таблицы Вега выпли в обработке немецкого математика К. Бремиера (1804—1877) в Берлине в 1857 г.

Мы не можем входить в детали двух вычислительных приемов, употребленных Бригсом. Оба они, как говорилось, восходят к Неперу. Один из них основан на том, что характеристика (термин Бригса), т. е. целая часть логарифма целого числа, на единицу меньше количества цифр в самом числе. С другой стороны, характеристика десятичного логарифма a^{10^n} , где $1 < a < 10$ дает четырнадцать первых знаков логарифма a . Чтобы найти эти знаки, нужно поэтому только знать количество цифр числа a^{10^n} , а это возможно и без вычисления самих цифр, что было бы немислимо. Дело в том, что число цифр произведения двух множителей равно сумме чисел их цифр или на единицу меньше, а судить, какой из двух случаев имеет место, можно по первым цифрам множителей. Так, Бригс вычислил

$$\log 2 = 0,30102999566398$$

и еще некоторые.

Однако большинство десятичных логарифмов простых чисел Бригс нашел по-другому — с помощью извлечения квадратных корней. Важную роль в его расчетах играло предельное соотношение, которое мы запишем в современной форме:

$$\ln a = \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1).$$

Поскольку

$$\log a = \frac{\ln a}{\ln 10},$$

$$\log a \approx \frac{n(\sqrt[n]{a} - 1)}{m(\sqrt[m]{10} - 1)}$$

при весьма больших m и n . Бригс по существу пользовался такой процедурой, причем брал m и n в виде степеней двойки. О замечательных результатах Бригса, относящихся к интерполированию, мы расскажем далее (см. стр. 156).

Как видно, открытие Непера в первые же годы приобрело исключительное широкую известность. Составлением логарифмических таблиц и совершенствованием их занялись очень многие математики, помимо уже названных, среди них Кеплер (Марбург, 1624—1625), применивший логарифмы к построению новых таблиц движений планет (1627). В приложении ко второму изданию «Описания» Непера (1618) было вычислено и несколько натуральных логарифмов; в нем можно усмотреть подход к введению предела $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ при $n \rightarrow \infty$. Быть может, это дополнение принадлежит В. Отреду. Вскоре за тем лондонский учитель математики Джон Спейделл издал таблицы натуральных логарифмов чисел от 1 до 1000 и синусов под названием «Новые логарифмы...» (New Logarithmes..., London, 1619). Термин «натуральные логарифмы» ввели П. Менголи (1659) и вслед за ним Н. Меркатор (1668).

Практическое значение всех этих работ было очень велико. Гигантский труд авторов таблиц и их виртуозная вычислительная сноровка заслуживают глубокого уважения. Но открытие логарифмов имело также глубочайшее теоретическое значение. Еще в рассматриваемое время оно вызвало к жизни исследования, о которых не могли и мечтать первые изобретатели, преследовавшие цель только облегчить и ускорить арифметические и тригонометрические выкладки с большими числами. Напомним еще раз, что Непер открыл путь в область новых трансцендентных функций — путь, на котором следующим этапом явилось введение показательной функции (Ньютон, Лейбниц), и что он дал первый образец кинематической трактовки и числового решения задачи, выражающейся обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка. Во второй трети XVII в. несколько математиков — Григорий Сен Венсан, Ферма, Броункер, Менголи — установили связь между логарифмом и квадратурой гиперболы, тем самым введя логарифмическую функцию уже не кинематически, а в образе площади. Меркатор на этой основе открыл и аналитическое представление логарифма в форме бесконечного степенного ряда. Если к сказанному добавить хотя бы лишь тот факт, что в самом начале XVIII в. Лейбниц и И. Бернулли поставили вопрос о природе логарифмов отрицательных чисел, то станет ясным, насколько мощные и разнообразные стимулы сообщило развитию анализа открытие Непера, порожденное потребностями в новых средствах вычислений.

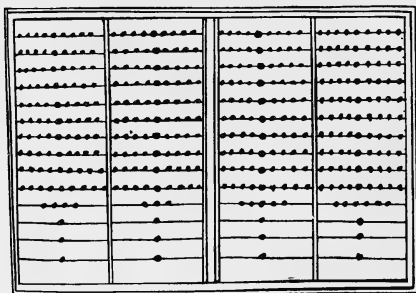
Русские счёты

К давно известному абаку (см. т. I, стр. 256) в Средние века добавился счет на линиях при помощи одинаковых подвижных жетонов, описание которого встречается в многочисленных учебниках арифметики, в том числе и в русских рукописях XVII в. На столе или доске перед вычислителем име-

лось несколько горизонтальных линий для обозначения единиц, десятков, сотен и т. д., считая вдаль от себя, перечерченных перпендикулярными линиями. В столбцах слева обозначались жетонами числа, над которыми производился действие. На каждую линию клали до четырех жетонов, а жетон между двумя линиями означал пять единиц того разряда, который откладывался на более близкой к вычислителю прямой. Промежуточные и окончательный результаты наносили в свободные правые столбцы. Иногда некоторые отделения служили для действий над дробями $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ или для денежных расчетов и т. п. Счет на линиях имел большое распространение в хозяйстве и в быту. Производство жетонов было делом специальной отрасли ремесла, достигавшей иногда высокого расцвета, как, например, в Нюрнберге в XVI—XVII вв. Лейбниц предпочитал этот счет письменным вычислениям, он начал выходить из употребления в XVIII в.

В некоторых странах существовали различного вида счеты, сходные с русскими. Мы уже рассказывали о китайском суаньпане и японском саробане (см. т. I, стр. 158), в которых, как и при счете на линиях, сохранялись еще следы старинного пятеричного счета. В России счет на линиях, именовавшийся «счетом костями», пользовался меньшей популярностью, чем «дощаной счет» — главное средство вычислений государственных чиновников и торговцев. Дощаной счет был приспособлен к особенностям налогового дела и землемерия, в котором основные единицы поверхности делились на более мелкие меры в отношениях $1 : 2 : 4 : 8 : \dots$, а также $1 : 3 : 6 : 12 : \dots$. Долгое время налог взимался в зависимости от количества и качества земельной площади, которую по определенным коэффициентам переводили в основные единицы учета — «сохи». В устройстве счетов приняты были во внимание также особенности валюты. В XVI в. в России установилась единая монетная система, в которой, помимо 1 рубля = 100 копейкам, в ходу были 1 гривеник = 10 копейкам, 1 алтын = 3 копейкам, 1 деньга = $\frac{1}{2}$ копейки и 1 полушка = $\frac{1}{2}$ денги. Соотношения $1 : 3$ и $1 : 2$ сохранялись в рус-

«Дощаной счет» с четырьмя счетными полями
(рисунок в рукописи № 1664 Погодинского собрания Государственной публичной библиотеки в Ленинграде; список 1691 г.)



ской метрологии вплоть до Октябрьской революции. Например, 1 пуд = 40 фунтам, а 1 фунт = 32 лотам = 96 золотникам, 1 сажень = 3 аршинам = 48 вершкам.

Старинные русские счеты состояли из четырех полей, попарно соединенных в двух ящиках. В каждом поле параллельно протягивались веревки или проволоки. Для счета целых чисел нанизывалось по девять или десять костей, на остальных веревках имелось по три, четыре, шесть и, наконец, по одной кости. Особые руководства подробно объясняли на примерах, как пользоваться дощатым счетом. В 1646 г. поземельный налог был заменен подворным, а затем (1722) и подушным. Счеты изменились и приняли тот вид, который имеют ныне. Осталось одно поле, и были устранены проволоки для действий с двоичными и двойно-третними дробями. Сохранены были только две проволоки по четыре кости в каждой для денежного счета на «деньги» и «полупки» (монеты по $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ копейки) и на полтины и четвертаки (монеты по $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ рубля, т. е. по 50 и 25 копеек). Русские счеты не выходят из обихода и теперь: они дешевы и при употреблении производят гораздо меньше шума, чем более быстрые арифмометры и компюметры.

Палочки Непера

Поиски новых вычислительных устройств занимали многих математиков XVII в. Непер в «Двух книгах о рабдологии или счете с помощью палочек» (*Rhabdologiae seu numerationis per virgulas libri duo*, Edinburgi, 1617)¹ описал действия на счетном приборе, составленном из 10 или более палочек — прямых параллелепипедов, на боковых гранях которых записаны произведения чисел от 1 до 9 на числа от 1 до 9 же; кроме того, есть еще палочка для нулевого множителя. Каждому множимому соответствует своя палочка; произведения пишутся сверху вниз в квадратах, разделенных диагоналями. Чтобы умножить, скажем, 23 на 57, нужно приложить палочки с заглавными цифрами 2 и 3 в строке, где множителю

5 соответствуют произведения 2·5 и 3·5  , найти с помощью

сложения произведение 23·50, т. е. 1150, а в строке, где множителю 7

соответствуют произведения 2·7 и 3·7  , найти произведение

23·7 = 161. После этого складываются 1150 + 161 = 1311. Деление с помощью этого прибора менее удобно.

Логарифмическая линейка

Палочки Непера некоторое время успешно применялись в странах западной Европы, но более широкое будущее предстояло другому изобретению, соединившему заключенную в этом инструменте идею автоматического и в сущности графического нахождения произведения данных мно-

¹ Рабдология — значит наука о палочках: греческое $\rho\alpha\beta\delta\iota\omicron\nu$ — палочка.

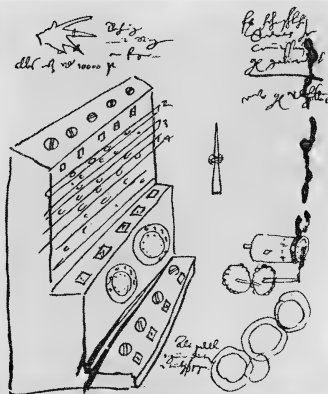
жителей со свойствами открытых Непером — логарифмов. Речь идет о логарифмической линейке. Основной шаг был сделан Э. Гунтером, придумавшим самую логарифмическую шкалу; это изобретение было описано лондонским адвокатом и любителем математики Эдмундом Уингейтом (1593—1656) в одном сочинении, напечатанном в Париже в 1624 г. Однако, чтобы пользоваться шкалой Гунтера, нужно было иметь циркуль, для откладывания отрезков. В. Отред усовершенствовал еще примитивный прибор, предложив употреблять две одинаковые шкалы, одна из которых перемещается вдоль другой. («Круги отношения и горизонтальный инструмент» — «The Circles of Proportion and the Horizontal Instrument», London, 1632). Когда через тридцать лет Сет Партридж (1662) заставил одну шкалу скользить в пазу другой, логарифмическая линейка, именовавшаяся «двойной шкалой отношений», приобрела в сущности современный вид.

Вычислительные машины

Развитие машинной техники, естественно, наводило на мысль построить для вычислений и механические устройства. Палочки Непера, упрощавшие умножение и деление, не облегчили сложения и вычитания, так же как логарифмические таблицы. Первую попытку механизировать все четыре главные арифметические операции и свести вмешательство вычислителя к минимуму предпринял профессор Тюбингенского университета, друг Кеплера, Вильгельм Шикард (1592—1635) — астроном и картограф, ориенталист и математик, безвременно скончавшийся в одну из чумных эпидемий, нередко поражавших тогда Европу. О своем изобретении Шикард известил Кеплера 20 сентября 1623 г., а в письме от 25 февраля 1624 г. дал его описание и чертёжный набросок.

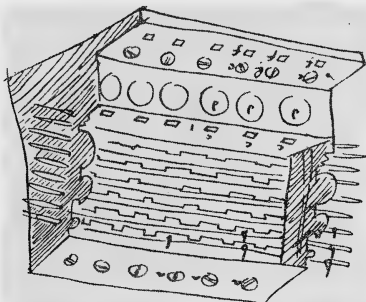
Машина Шикарда уже имела много общего с будущими арифмометрами. Она представляла собой комбинацию цилиндров с зубчатыми цифровыми колесами, вращение которых в ту или иную сторону производило операции сложения и вычитания. В ней существовал и механизм переноса десятков, заставлявший при полном повороте одного колеса на десять делений повернуться следующее всего на одно деление; для этого Шикард пользовался такими же колесами, у которых снимались девять зубов из десяти. Для умножения и деления служили специальные цилиндры, аналогичные палочкам Непера и помещенные в особой части машины. Цифры можно было прочесть в окошечках на внешней оболочке. Приводилась в действие машина, подобно современному автоматическому телефонному аппарату. Во втором из упомянутых писем Шикард сообщал, что велел изготовить для Кеплера ее экземпляр, который, к сожалению, погиб во время пожара. Ни один экземпляр этого инструмента, который автор называл «арифметической машиной», не сохранился, но недавно она была реконструирована по описаниям, и теперь ее образчики можно увидеть в ратуше Тюбингена и в музее г. Вейля — родины Кеплера.

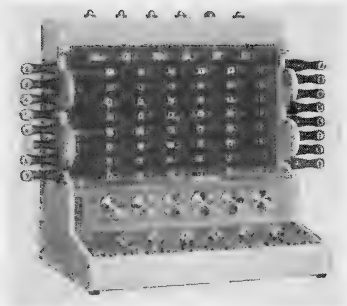
Другая суммирующая машина была создана совершенно независимо от Шикарда молодым Паскалем. Поводом к тому послужило желание облегчить большие и долгие финансовые вычисления, которые пришлось производить по поручению правительства его отцу, привлекему на помощь и сына. В 1642 г. Б. Паскаль разработал конструкцию арифметической машины, принципы которой те же, что у Шикарда. В королевском патенте 1645 г. указывалась, как главная часть изобретения, механизация переноса



Эскиз В. Шикарда его счетной машины:
вид сбоку и основные узлы
(из записной книжки изобретателя)

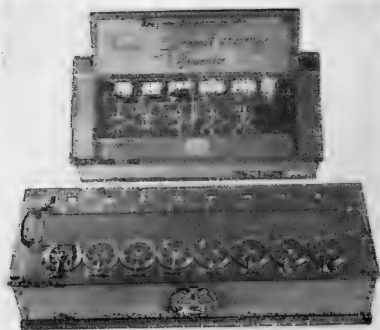
Эскиз В. Шикарда его счетной машины
(хранится среди бумаг Келлера)





Счетная машина В. Шикарда (реконструкция)

Счетная машина Б. Паскаля, экземпляр 1652 г.
(Национальный музей искусств и ремесел в Париже)



десятков. Своему изобретению Паскаль придавал большое значение, подчеркивая безошибочность машины, простоту обращения с нею, обусловленную автоматизмом действия, и другие достоинства. Преодолевая большие технические трудности, он с помощью опытных мастеров изготовил несколько десятков успешно работавших экземпляров машины, которые можно было купить на квартире у его знакомого профессора Французского коллежа Роберваля. Отдельные экземпляры машины хранятся в Париже и других местах.

Наконец, в 1671 г., не зная ничего о полностью забытом тем временем изобретении Шикарда, новую конструкцию вычислительной машины предложил Лейбниц, внесший затем в нее дополнительные улучшения и описавший ее в записках Берлинской академии — *Miscellanea Berolinensia*, 1710 г. По сравнению с обоими своими предшественниками Лейбниц существенно механизировал действия умножения и сложения. Одна из его машин хранится в Ганноверской библиотеке.

Несмотря на старания таких великих умов, как Паскаль и Лейбниц, преодолевавших принципиальные трудности в создании ручных суммирующих машин, их изобретения были еще далеки от того, чтобы найти многих потребителей и чтобы ремесленное изготовление их стало коммерчески выгодным. Отдельные технические усовершенствования, предложенные в XVIII в., были недостаточны. Только в последней четверти прошлого века были сконструированы современные высококачественные ручные арифмометры и началось их массовое фабричное производство.

ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Возрождение теории чисел

В XVII в. вместе с интересом к точным наукам воскресает и интерес к теории чисел. Особенно он возрос после издания в 1621 г. литератором и любителем математики Клодом-Гаспаром Баше де Мезириаком (1581—1638) греческого текста «Арифметики» Диофанта с латинским переводом и комментариями. Во Франции образовалась группа ученых, занимавшихся задачами теории чисел. В нее входили Пьер Ферма, сотрудник монетного двора Бернар Френикль де Бесси (1605—1675), лионский учитель математики Жак де Билли (1602—1679), Мерсенн, отчасти Декарт и Блез Паскаль. Эти люди жили в различных городах Франции, и некоторые даже никогда не видели друг друга. Зато они вели оживленную переписку как непосредственно друг с другом, так и через Мерсенна (ср. стр. 17). Впоследствии в эту переписку были втянуты ученые Англии — Валлис, Броуникер и Голландии — Гюйгенс, Схоотен. Когда Мерсенн скончался, его функции посредника между учеными занял друг Ферма Пьер де Каркави (ум. 1684), любитель математики и королевский библиотечник, один из организаторов Парижской академии наук.

Однако из всей этой плеяды ученых одному только Пьеру Ферма удалось выделить из хаоса многочисленных задач и частных вопросов, сразу же возникающих перед исследователем при изучении свойств целых чисел, те основные проблемы, которые стали центральными для всей классической теории чисел. Ему же принадлежит открытие замечательного метода для доказательства теоретико-числовых предложений — так называемого метода бесконечного спуска. Поэтому Ферма по праву может считаться основоположником алгебраической теории чисел.

Пьер Ферма

Уроженец юга Франции, Пьер Ферма (1601—1665) провел большую часть жизни в Тулузе, где состоял советником местного парламента (т. е. высшего суда). Он получил юридическое образование, был прекрасным знатоком древних и современных ему языков: латыни, древнегреческого, испанского, итальянского, писал изящные стихи по-французски, по-испански и по-латыни. Греческий он знал настолько хорошо, что делал поправки ко многим ученым переводам и мог бы прославиться как знаток эллинизма. Изучение в подлинниках Евклида, Архимеда, Аполлония, Паппа и Диофанта, вероятно, послужило толчком для занятий Ферма



Пьер Ферма
(с гравюры Фр. де Пуалли, помещенной в издании Диофанта 1670 г.
с замечаниями Ферма)

математикой. Именно здесь и проявился с полной силой его гений. Ферма был чрезвычайно разносторонним математиком: он существенно развил методы определения площадей и объемов, создал новый метод касательных и экстремумов, наряду с Декартом явился создателем аналитической геометрии, вместе с Паскалем заложил основы теории вероятностей. Как и большинство ученых того времени, Ферма не ограничивался исследованиями по «чистой» математике. Он занимался оптикой, и ему принадлежит носящий его имя принцип минимума, которому следует луч света при прохождении через неоднородную среду.

Одной из любимых областей математики была для Ферма теория чисел, которой он занялся, по-видимому, в середине 30-х годов и которой посвящены наиболее вдохновенные строки его писем. «Арифметика» — писал он, — имеет свою собственную область, теорию целых чисел, эта теория была лишь слегка затронута Евклидом и не была достаточно раз-

Титульный лист латинского издания Диофанта с комментариями
Баши де Мезириака и замечаниями Ферма (Тулуза, 1670)

DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANCVLIS
LIBER VNVS.

VVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
et observationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.

Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum
ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.



TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSCH, à Regione Collegij Societatis Iesui.
M. DC. LXX.

работана его последователями (если только она не содержалась в тех книгах Диофанта, которых нас лишило разрушительное действие времени); арифметики, следовательно, должны ее развить или возобновить»¹.

Ферма писал мало и всегда очень сжато, а кроме того, не публиковал свои работы, циркулировавшие при его жизни лишь в рукописях. Некоторые открытия он изложил только в переписке. Свое намерение написать специальное сочинение по теории чисел дошло до нас в разрозненном виде: некоторые содержатся в его письмах, другие представляют его замечания к задачам Диофанта на полях принадлежавшего ему экземпляра «Арифметики». Только в 1670 г., после смерти Ферма, его старший сын Самюэль выпустил новое издание Диофанта с комментариями Бапе и замечаниями Ферма, а позднее собрал сохранившиеся в бумагах отца математические наброски и небольшие трактаты и издал их под названием «Разные математические сочинения» (*Varia opera mathematica*, Tolosae, 1679). Но и после этого были найдены многие письма и заметки Ферма, не вошедшие в это издание.

Таким образом, теоретико-числовые результаты Ферма дошли до последующих математиков в виде проблем, в подавляющем большинстве случаев без доказательств и указаний на внутренние связи между ними. После смерти Ферма проблемы эти пролежали без движения около семидесяти лет, пока ими не заинтересовался Л. Эйлер. С этого момента началась их новая жизнь. Исследования Эйлера превратили теорию чисел в неотъемлемую составную часть математики.

Перейдем теперь к проблемам Ферма.

Простые числа

Занимаясь арифметикой целых чисел, Ферма обратил внимание на большую роль, которую играют простые числа. По-видимому, он начал искать различные критерии для определения того, будет ли заданное число N простым или составным. Он искал также выражения $F(n)$, которые при любом целом значении n давали бы только простые числа. Ферма полагал, что таким выражением будет

$$F(n) = 2^{2^n} + 1.$$

Действительно, при $n = 0, 1, 2, 3$ и 4 $F(n)$ принимает значения 3, 5, 17, 257, 65537, являющиеся простыми числами. Однако, как показал Эйлер, $F(5) = 2^{32} + 1$ не простое. Что не существует целого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, все значения которого при целых x были бы простыми числами, доказали Хр. Гольдбах и Эйлер (ср. т. III, гл. 3).

Простые числа вида $2^{2^n} + 1$ называются теперь простыми числами Ферма. До сих пор неизвестно, существует ли конечное число простых чисел Ферма или их бесконечно много.

Одним из критериев для определения простоты числа послужила так называемая малая теорема Ферма.

P. Fermat. Oeuvres, v. II, Parisii, 1894, p. 334.

Малая теорема Ферма

Ферма установил, что для каждого числа a , не делящегося на простое число p , существует такое число f , являющееся делителем $p - 1$, что $a^f - 1$ делится на p . Он сформулировал это предложение сначала для $a = 2$, затем для любого a .

Малая теорема Ферма — одна из самых важных теорем элементарной теории чисел; здесь впервые мы сталкиваемся с частным случаем важнейшего понятия современной алгебры — конечной циклической группой, образованной элементами

$$1, a, a^2, \dots, a^{f-1},$$

которые рассматриваются по модулю p (т. е. два элемента считаются равными, если при делении на p они дают один и тот же остаток). В малой теореме на частном примере установлено одно из основных предложений теории конечных групп: порядок любого элемента конечной группы является делителем порядка группы (ср. т. III, гл. 2).

Квадратичные формы

Ферма впервые поставил вопрос об определении вида простых чисел, представимых некоторой квадратичной формой. Число n называется представимым формой

$$ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

если существуют такие целые, взаимно простые x_1, y_1 , что

$$n = ax_1^2 + 2bx_1y_1 + cy_1^2.$$

Ферма решил этот вопрос для форм

$$x^2 + y^2, x^2 + 2y^2, x^2 - 2y^2, x^2 + 3y^2 \text{ и } x^2 + xy + y^2.$$

Так, он нашел, что формой $x^2 + y^2$ представимы те и только те простые числа, которые лежат в прогрессии $4n + 1$, причем каждое простое число этой прогрессии представимо в виде суммы двух квадратов единственным образом, например

$$5 = 4 \cdot 1 + 1 = 1^2 + 2^2$$

(этот результат, впрочем, был известен еще Диофанту).

Далее Ферма нашел, что формой $x^2 + 2y^2$ представимы все простые числа вида $8n + 1$ и $8n + 3$ и только они, а формой $x^2 + 3y^2$ и $x^2 + xy + y^2$ — простые числа вида $6n + 1$.

Замечательно, что Ферма рассматривает распределение по прогрессиям только простых чисел, представимых некоторой формой. Именно на этом пути были открыты в дальнейшем те глубокие закономерности, которые охарактеризованы с помощью квадратичного закона взаимности.

Вопрос о нахождении всех чисел, как простых, так и составных, представимых некоторой квадратичной формой, Ферма поставил и решил только для случая формы $x^2 + y^2$. Для составных чисел уже не суще-

стует столь же простого закона, характеризующего представимые числа, как в случае простых чисел.

Однако из формулы

$$(x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = (xu \pm yv)^2 + (xv \mp yu)^2$$

видно, что произведение двух представимых чисел снова будет представимым числом. Ферма как раз и воспользовался этой формулой, чтобы показать, что множество чисел, представимых формой $x^2 + y^2$, замкнуто по умножению. Тем самым простейшая формула для композиции форм, известная еще Диофанту, была использована для представления чисел. Теория композиции форм была впоследствии развита Эйлером, Лагранжем и особенно Гауссом.

Упомянем еще предложение о представимости любого целого положительного числа суммой не более четырех целых квадратов, впервые высказанное Ба́ше де Мезириаком в комментариях к его изданию «Арифметики» Диофанта 1621 г. В замечании, относящемся к этому месту, Ферма высказал более общую теорему, согласно которой любое натуральное число есть либо n -угольное, либо сумма не более чем n n -угольных чисел, причем утверждал, что располагает ее доказательством. В 1636 г. теорема стала известной в кругу французских математиков. Доказательство свое Ферма не сообщил; он лишь упомянул в одном письме 1654 г. Паскалю, что вывод опирается на представимость простых чисел вида $4n + 1$ суммой двух квадратов. Эта теорема Ферма для $n = 4$ была доказана во второй половине XVIII в. благодаря совместным усилиям Эйлера и Лагранжа, для $n = 3$ — Гауссом (1801) и в общем случае — О. Коши (1813—1815).

Неопределенные уравнения

Ба́ше де Мезириаку и Ферма принадлежит заслуга постановки задачи о решении неопределенных уравнений в целых числах. До них, следуя за Диофантом, европейские математики обычно искали рациональные решения таких уравнений.

Ба́ше де Мезириа́к, не зная о своих индийских предшественниках (см. т. I, стр. 194), подробно разработал и изложил на числовых примерах способ решения в целых положительных числах линейного уравнения с двумя неизвестными

$$ax - by = 1,$$

где $(a, b) = 1$. Этот вопрос Ба́ше изложил в замечательном сборнике «Приятных и занимательных задач, рассматриваемых в числах» (*Problèmes plaisans et delectables qui se font par les nombres*, Lyon, 1612), неоднократно переиздававшихся вплоть до наших дней, — в последний раз книга вышла в 1959 г.

Ферма исследовал гораздо более трудную задачу решения в целых положительных числах уравнения с двумя неизвестными второй степени. В своем письме, получившем название «Второго вызова математикам» (февраль 1657), он предложил своим корреспондентам найти общее правило решения уравнения

$$ax^2 + 1 = y^2, \quad (1)$$

где a — целое неквадратное число. Такое уравнение рассматривали еще математики древней Греции и средневековой Индии (см. т. I, стр. 195). Впоследствии Эйлер по ошибке связал его с именем английского алгебраиста Джона Пелля (1611—1685). Теперь более принято называть уравнение (1), отдавая долг справедливости, уравнением Ферма, что и мы будем делать в дальнейшем.

Проблема решения уравнения Ферма распадается на две: 1) найти наименьшее целочисленное решение x_0, y_0 , после чего, 2) зная наименьшее решение, найти все остальные.

В своем письме Ферма предлагал найти решения при $a = 149, 109, 433$. Эти значения выбраны так, что наименьшее решение соответствующего уравнения Ферма очень велико и его нельзя найти простым подбором. Вероятно, Ферма специально выбрал эти примеры, чтобы узнать, владеют ли его коллеги общим методом для решения первого из указанных нами вопросов. Что касается самого Ферма, то не подлежит сомнению, что он имел общие формулы для решения второго из вышеназванных вопросов. Для случая $a = 2$ он привел соответствующие формулы в письме к Френикию. По-видимому, он владел и методом нахождения наименьшего решения, однако в его бумагах никаких следов такого приема не осталось.

Ферма придавал уравнению (1) очень большое значение, считая, что оно поясняет путь, по которому должна развиваться наука о числах. Но его современники не поняли значения этого уравнения. По поводу уравнения Ферма разгорелась интересная дискуссия, в которой приняли участие английские математики и которая была издана Валлисом в 1658 г. под названием «Недавняя переписка о некоторых математических вопросах» (*Commercium epistolicum de quaestionibus quibusdam mathematicis nuper habitum, Oxoniae*). Из этой переписки видно, что английские математики сначала не поняли задачу: Броункер предложил ее решение в рациональных числах, Валлис считал, что требование найти решение в целых числах делает задачу менее общей. После дополнительных разъяснений Ферма, Броункер решил уравнение Ферма при $a = 109$ с помощью разложения $\sqrt{a}$ в непрерывную дробь, но не доказал ни того, что его способом всегда можно найти решение, ни того, что при этом получаются все решения. Впоследствии эффективное решение уравнения Ферма и исчерпывающее его исследование было дано Эйлером и Лагранжем (см. т. III, гл. 3). Наконец, в 1846 г., обобщив результаты Ферма, Эйлера и Лагранжа, Лежен Дирихле построил свою теорию единиц в полях алгебраических чисел.

Ферма рассматривал и более общее неопределенное уравнение второго порядка

$$ax^2 + b = y^2. \quad (2)$$

Приведа пример неопределенного уравнения

$$2x^2 + 7967 = y^2,$$

он писал: «Я нашел общее правило, чтобы решать такое уравнение, если оно возможно, или чтобы определять его невозможность. И это — во всех случаях и для всех чисел»¹.

¹ P. Fermat. Oeuvres, v. II, p. 431.

Далее, в примечаниях к Диофанту, приведя пример так называемого двойного равенства

$$2x + 3 = u^2$$

$$3x + 5 = v^2,$$

решение которого, как нетрудно видеть, сводится к решению уравнения вида

$$au^2 - bv^2 = c,$$

он писал: «Баше в комментариях к Диофанту приписывает себе честь нахождения правила для двух частных случаев. Я даю общее правило для всех случаев. И определяю правилами, является ли оно возможным или нет»¹.

Больше никаких указаний на уравнение (2) в работах Ферма нет. Ни одному из его современников решение этого уравнения было не под силу, Эйлер продвинул вперед его исследование, а полностью решил его Лагранж (см. т. III, гл. 3).

Решение неопределенных уравнений в рациональных числах

В этом вопросе Ферма следовал за Диофантом. Еще Виет и Баше де Мезириак обратили внимание на метод, с помощью которого Диофант находил рациональные решения неопределенных уравнений третьего порядка, а применил его для определения рациональных решений уравнений

$$1) x^3 + y^3 = a^3 - b^3,$$

$$2) x^3 - y^3 = a^3 + b^3,$$

$$3) x^3 - y^3 = a^3 - b^3.$$

Одно решение здесь находится очевидным образом, а другие определяются по методу Диофанта (см. т. I, стр. 147—148). Ферма добавил к этим трем уравнениям четвертое

$$4) x^3 + y^3 = a^3 + b^3,$$

которое не могли решить его предшественники, так как если, следуя Диофанту, сделать подстановку

$$x = \zeta + a, \quad y = k\zeta + b,$$

а затем приравнять нулю коэффициент при первой степени ζ , то полученная рациональная точка x, y будет обязательно иметь одну отрицательную координату, т. е. сумма двух кубов представится не суммой, а разностью двух других кубов (это будет решением задачи 2, а не 4). Ферма находит положительные рациональные значения x, y , решая последовательно задачи 2, 3 и, наконец, 1.

¹ P. Fermat. Oeuvres, v. II, p. 431.

В примечаниях к 12-й задаче IV книги «Арифметики» Диофанта Ферма рассматривает задачу

$$x^4 - y^4 = u^3.$$

Он полагает $x - y = 1$ и после этого легко находит одно из рациональных решений $y = -9/22$, $x = 13/22$. Чтобы найти положительные рациональные решения,¹ Ферма делает подстановку $y = y' - \frac{9}{22}$, $x = x' + \frac{13}{22}$, т. е. осуществляет сдвиг соответствующей кривой. Этот прием Ферма применял многократно, а после его смерти описание метода Диофанта с применением сдвигов для получения положительных решений дал де Билли в «Новом открытии в аналитическом учении» (*Doctrinae analyticae inventum novum*), составленном по письмам к нему от Ферма и напечатанном в уже упоминавшемся издании Диофанта 1670 г. в качестве введения. Вряд ли Ферма мог не заметить аналогии своего приема с теми преобразованиями, которыми он пользовался в аналитической геометрии. Вероятно, он понимал также связь метода Диофанта со своим методом касательных к алгебраическим кривым. Однако о геометрическом смысле метода нахождения рациональных решений неопределенных уравнений третьего порядка, который заключается в том, что в рациональной точке $P(x_1, y_1)$ алгебраической кривой третьего порядка проводится касательная и ищется другая ее точка пересечения с кривой $Q(x_2, y_2)$, которая также будет рациональной, Ферма не упоминает, как не делал этого впоследствии и Эйлер. Впервые явная геометрическая интерпретация метода появилась в XIX в. в работах Коши, Люка и Пуанкаре.

Метод Диофанта давал возможность находить рациональные решения в том случае, когда одно из таких решений было уже найдено. Вскоре Ферма встретился с такими задачами, которые не имеют рациональных решений. Они особенно привлекли его внимание. Одна из таких проблем, так называемая великая теорема Ферма, сыграла совершенно исключительную роль в истории теории чисел.

Великая теорема Ферма

В замечании к 8-й задаче II книги «Арифметики» Диофанта, в которой требуется разложить заданное квадратное число a^2 в сумму двух квадратов, Ферма высказал следующее утверждение: «Наоборот, невозможно разложить ни куб на два куба, ни биквадрат на два биквадрата, ни, вообще, степень, большую квадрата, на две степени с тем же показателем; и открыл этому поистине чудесное доказательство, которое из-за недостатка места не может поместиться на этих полях»¹. Это и есть так называемая великая теорема Ферма, которую теперь выражают в такой форме: уравнение

$$x^n + y^n = z^n \quad \text{при } n > 2 \text{ и } xyz \neq 0$$

неразрешимо в целых (а значит, и в рациональных) числах.

Однако в своих письмах Ферма говорил об этой теореме только для случаев $n = 3$ и $n = 4$. Последний случай был доказан самим Ферма.

¹ P. Fermat. Oeuvres, v. II, p. 244.

Это единственное теоретико-числовое доказательство, которое от него дошло. Оно содержится в замечаниях к Диофанту, и в нем доказывалось, что не существует прямоугольного треугольника в целых числах, площадь которого была бы квадратом. Из этого предложения следует, что не существует двух биквадратов, сумма которых равнялась бы квадрату, а значит, и биквадрату. Доказательство проводится методом спуска. В 1659 г., за два года до смерти, Ферма описал этот метод в своем письме-завещании, адресованном Каркави, которое известно под названием «Сводка новых результатов в науке о числах». Мы приведем это описание.

Метод бесконечного спуска

Ферма пишет, что «поскольку обычные методы, находящиеся в книгах, были недостаточны для доказательства столь трудных предложений, то я, наконец, нашел совершенно особый путь для их достижения. Я назвал этот способ доказательства *бесконечным или неопределенным спуском*» (*descente infinie ou indéfinie*)¹.

Вначале Ферма пользовался этим методом только для доказательства отрицательных предложений, например: «Не существует прямоугольного треугольника в целых числах, площадь которого была бы квадратом». «Доказательство проводится следующим образом: если бы существовал прямоугольный треугольник в целых числах, площадь которого была бы квадратом, то существовал бы другой треугольник, меньший первого, обладающий тем же свойством. Если бы был второй, меньший первого и с тем же свойством, то тем же рассуждением мы получили бы третий, обладающий тем же свойством и меньший второго, наконец, четвертый, пятый и т. д., спускаясь до бесконечности. Но если дано число, то не существует бесконечного множества чисел, меньших, чем оно... Отсюда заключают, что невозможно существование прямоугольного треугольника, площадь которого была бы квадратом»².

Далее Ферма говорит, что после долгих размышлений он смог применить свой метод и для доказательства утвердительных предложений, как, например: каждое простое число вида $4n + 1$ представимо суммой двух квадратов. Но для применения метода к доказательству других предложений, например для доказательства того, что каждое число представимо суммой не более четырех квадратов, требуется применение «новых принципов», на которых Ферма подробнее не останавливается. Далее идет перечисление всех теорем, которые Ферма доказал, пользуясь методом спуска. Среди них находится и великая теорема для случая $n = 3$. В конце письма Ферма выражает надежду, что этот метод окажется полезным для последующих математиков и покажет им, что «древние не все знали». К сожалению, это письмо было опубликовано только в 1879 г. Однако Эйлер восстановил метод по отдельным замечаниям Ферма и с успехом применил его к проблемам неопределенного анализа. Ему, в частности, принадлежит и доказательство великой теоремы для $n = 3$ (см. т. III). Напомним, что первая попытка доказать неразложимость куба натурального числа в сумму двух кубов была сделана около 1000 г. на арабском Востоке (см. т. I, стр. 228).

¹ P. Fermat. Œuvres, v. II, p. 431.

² Там же, p. 431.

Метод спуска вновь начал играть ведущую роль в исследованиях по диофантову анализу А. Пуанкаре и А. Вейля. В настоящее время для применения этого метода вводится понятие высоты, т. е. такого натурального числа, которое определенным образом ставится в соответствие каждому рациональному решению. При этом если удастся доказать, что для каждого рационального решения высоты h найдется другое решение высоты меньше h , то отсюда будут следовать неразрешимость задачи в рациональных числах.

Значение проблем Ферма

Вся последующая алгебраическая теория чисел вплоть до работ Гаусса развивалась, отправляясь от проблем Ферма. Исследовались в основном вопросы представления чисел квадратичными формами и задачи диофантова анализа, в частности неопределенные уравнения второго порядка. В работах Лагранжа, а особенно Гаусса, первый из названных вопросов был преобразован в теорию квадратичных форм, которая по существу являлась первым учением об арифметике квадратичных полей. Этот же вопрос привел Эйлера к открытию квадратичного закона взаимности. Наконец, в XIX в. исследования, связанные с великой теоремой Ферма и законами взаимности, потребовали расширения области арифметики. При изучении биквадратичного закона взаимности Гаусс ввел целые комплексные числа, а попытки доказательства великой теоремы привели к рассмотрению целых чисел в полях деления круга. Центральной проблемой алгебраической теории чисел в XIX в. становится построение арифметики в кольцах алгебраических чисел. Для спасения обычных законов арифметики вводятся идеальные множители (Куммер, Золотарев), идеалы (Дедекинды) и дивизоры (Кronecker). Строится теория колец, модулей и идеалов, появляются локальные и полулокальные кольца. И все эти ветви восходят к проблемам Ферма. Исчерпаны ли они? По-видимому, все проблемы, кроме великой теоремы, уж полностью раскрыты. Но великая теорема в общем виде еще не доказана. Поэтому мы вправе ожидать здесь появления новых идей и методов.

ПЯТАЯ ГЛАВА

КОМБИНАТОРИКА И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Предыстория теории вероятностей

Задачи, которые оказали существенное влияние на зарождение и первоначальное развитие теории вероятностей, возникали в статистике, в практике страховых обществ, при обработке результатов астрономических наблюдений, в различных азартных играх. Разработка вероятностных вопросов была тесно связана с комбинаторикой. Наконец, вопросы, касающиеся случайности и необходимости и непосредственно связанные с понятием вероятности, всегда стояли в философии (ср. стр. 91 и 96).

Вопросы вероятностного характера возникали и во многих других сферах деятельности человека. Многие из этих вопросов возникали в далекой древности, но в то время они не стимулировали развитие теории вероятностей, так как возникали спорадически и, главное, не были существенными ни в развитии науки, ни в жизни общества.

Большинство первых задач теории вероятностей было связано с азартными играми. Мы и сейчас при изложении начал теории вероятностей, в педагогических целях, часто обращаемся к играм в кости или в карты, ибо в этих случаях легко подсчитать вероятности тех или иных возможных исходов. Азартные игры доставляли здесь удобные схемы и модели, а отчасти и терминологию, позволявшие описать многие вероятностные явления и задачи. Конечно, и сами игры выдвигали задачи, стимулировавшие развитие теории вероятностей, хотя это и не было решающим.

Одной из первых задач, которую следует отнести к теории вероятностей, являлся подсчет числа различных возможных исходов при бросании нескольких игральных костей. Первые известные подсчеты для случая трех костей относятся к X—XI вв. Еще до XV в. встречались поэмы, в которых каждому исходу при бросании трех игральных костей соответствовал определенный стих. Таких стихов было 56. Действительно, 56 — это число всех возможных исходов при бросании, если не учитывать порядок появления чисел на костях.

Самая ранняя известная нам попытка подсчитать число возможных исходов при бросании трех игральных костей, включая и перестановки, встречается в XIII в. Но и значительно позже многие авторы делали аналогичные подсчеты неверно.

В 1477 г. Бенвенуто д'Имола в Венеции издал «Божественную Комедию» Данте со своими примечаниями. VI часть книги «Чистилище» начинается словами:

«Когда кончается игра в три кости,
 То проигравший снова их берет
 И мечет их один в унылой злости;
 Другого провожает весь народ;
 Кто спереди зайдет, кто сзади тронет,
 Кто сбоку за себя словцо ввернет.
 А тот идет и только ухо клонит;
 Подаст кому,— идти уже вольней.
 И так он понемногу всех разгонит.
 Таков был я в густой толпе теней,
 Чье множество казалось превелико,
 И, обещая, управлялся с ней»¹.

В примечании к этому месту д'Имола, говоря об играх в кости, подсчитывает количество различных исходов при бросании трех игральных костей, но он допускает ошибку, считая, что четыре (и семнадцать) очка могут выпасть только одним способом. На самом деле таких способов в обоих случаях по три.

Подсчетом количества исходов при бросании нескольких игральных костей занимались Д. Кардано, Н. Тарталья и другие крупные математики XVI в. Они отчетливо различали все случаи как с повторениями, так и без повторений. Наиболее полный анализ этой задачи был произведен Г. Галилеем в «Рассуждении об игре в кости» (*Considerazione sopra il giuoco dei dadi*). Время написания неизвестно, впервые опубликовано в 1718 г.)

Весьма важной явилась задача о справедливом разделении ставки между двумя игроками, если игра прервана до выигрыша одним из игроков определенного числа партий или очков. Эта задача решается в энциклопедическом труде Луки Пачоли, изданном в 1494 г. (см. т. I, стр. 286), но была известна и ранее: она имеется в разных занимательных варпантах и учебниках арифметики еще в XIII в. Ставка, по Пачоли, должна быть разделена пропорционально набранным очкам, т. е. если один партнер *A* к моменту прекращения игры выиграл *p*, а другой *B* выиграл *q* партий, то ставка должна быть разделена между *A* и *B* в отношении *p:q*.

Кардано в «Практике общей арифметики» (*Practica Arithmeticae generalis*, Mediol., 1539) обоснованно критиковал решение Пачоли, но верного решения этой задачи сам не нашел. Он предлагал делить ставку в отношении $(1 + 2 + 3 + \dots + (s - q)) : (1 + 2 + 3 + \dots + (s - p))$, где *s* — количество партий, до которого должна была продолжаться игра по условию, а *p* и *q* — количества партий, выигранных партнерами. Неверно решал эту задачу и Тарталья.

При решении других задач вероятностного характера в работе «Об азартной игре» (*De ludo aleae*), увидевшей свет только в 1663 г., Кардано фактически пользовался уже теоремами сложения и умножения вероятностей. Он близко подошел здесь к так называемому классическому определению вероятности и в связи с одной частной задачей высказал положение, что при постоянном повторении бросаний теоретический подсчет подтверждается на практике. Не позднее чем четверть века спустя после

¹ Данте. Божественная Комедия. Чистилище. Перевод М. Лозинского. М.—Л., 1950, стр. 167.

выхода этого сочинения Я. Бернулли установил носящий его имя закон больших чисел.

Учет ошибок наблюдений всегда беспокоил исследователей. Галилей, обсуждая в «Диалоге о двух главнейших системах мира, птолемеевой и коперниковой» (*Dialogo ... sopra i due massimi sistemi del mondo tolemaico, e copernicano*, 1632) вопрос о расстоянии до Новой звезды 1572 г., сделал очень ценные заключения. Он пришел к выводам, что 1) ошибки при измерениях неизбежны, 2) вероятности ошибок разного знака одинаковы, 3) вероятность ошибки увеличивается с уменьшением ошибки и 4) около истинного результата скапливается наибольшее количество результатов наблюдений. В этих выводах Галилея по существу содержится начала классической теории ошибок, развитой много спустя П. Лапласом и К. Гауссом.

На этих отдельных задачах и вопросах, а также в практике статистики и страхования и в других областях вырабатывались общие вопросы и методы теории вероятностей.

Успехи комбинаторики

Занимаясь задачами теории вероятностей, математики, естественно, встречались и с вопросами комбинаторного характера, которые в другой связи возникали и ранее. Например, Тарталья определил число различных сочетаний из n элементов по m (без повторений), которое мы обозначаем вслед за Эйлером (1778, опубл. 1806) символом $\binom{n}{m}$ или, как многие математики XIX в., C_n^m от слова *combinasion*, которое употреблял уже Паскаль. Этот же результат был вновь найден парижским преподавателем математики Пьером Эригоном (1634) и затем (1656) преподавателем же в Лувене и Антверпене Андре Таке (1612—1660), учебники которого по арифметике и геометрии пользовались большим распространением в XVII и XVIII вв. Между прочим, в «Теории и практике арифметики» (*Arithmeticae theoria et praxis*, Lovanii, 1656) Таке впервые употребил термин «перестановка» (*permutatio*), вошедший в обиход благодаря Я. Бернулли. Упомянем, что обработки Таке «Начал» Евклида и теорем о шаре и круглых телах Архимеда (*Elementa geometriae planae et solidae*, Antverpiae, 1654) вышли в русском переводе И. Сатарова под названием «Эвклидовы элементы...» и «Архимедовы теоремы...» (СПб., 1739—1745).

Важную роль в развитии комбинаторики сыграл «Трактат об арифметическом треугольнике» (*Traité du triangle arithmétique*, 1654; опубл. посмертно, Париж, 1665) Б. Паскаля, который записал таблицу сочетаний в треугольной форме, как показано на следующей странице.

Здесь в пересечении l -й строки и k -го столбца стоит число C_{l+k-2}^{k-1} , или, что то же, число C_n^m находится в пересечении $(m+1)$ -го столбца и $(n-m+1)$ -й строки. В довольно сходной форме такая таблица, как таблица биномиальных коэффициентов, встречалась уже ранее и в странах Азии (т. I, стр. 174 и 246) и в Европе: у Петра Апиана (1527), М. Штифеля (1544) и Н. Тарталья (1556) — у последнего в виде четырехугольника, строки которого образуют последовательности фигурных чисел (т. I, стр. 301).

Аддитивное рекуррентное соотношение между числами этих таблиц,

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1},$$

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	3	6	10	15	21	28	36		
1	4	10	20	35	56	84			
1	5	15	35	70	126				
1	6	21	56	126					
1	7	28	84						
1	8	36							
1	9								
1									

Арифметический треугольник
Паскаля

также было давно известно. Французский математик П. Эригон во втором томе своего «Математического курса» (*Cursus mathematicus*, Paris, 1634—1637), изданного параллельно на латинском и французском языках, сделал следующий шаг вперед, установив, что

$$C_n^m = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m}.$$

Впрочем, это мультипликативное представление получило большую известность только благодаря «Трактату» Паскаля, который к тому же впервые доказал его общим образом с помощью принципа полной математической индукции. Он показал, что этот закон имеет место для начальных строк, а также, что из справедливости этого закона для n -й строки вытекает его выполнимость для $(n+1)$ -й строки, а значит, закон справедлив для всех строк. Наряду с аддитивным соотношением между числами сочетаний это мультипликативное выражение принадлежит в комбинаторике к основным. Ньютон, отправляясь от такого выражения, пришел к своему знаменитому биномиальному бесконечному ряду (см. стр. 228).

Сам по себе результат Эригона и Паскаля не был новым: мультипликативное представление C_n^m впервые дал в своей арифметике, написанной на древнееврейском языке (1321), Леви бен Гершон (ср. т. I, 325). Здесь же содержались правила вычисления числа перестановок $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, которые Леви бен Гершон вывел с помощью полной индукции и размещений A_n^m . Однако эти открытия провансальского математика не получили широкого распространения. Принцип полной индукции вновь появляется у Мавролика (1575), у которого, возможно, он был заимствован Паскалем, высказавшим его с совершенной отчетливостью. В неявном виде этот принцип восходит к древним грекам, например к «Началам» Евклида.

В «Трактате» Паскаля рассмотрены и некоторые другие свойства сочетаний, их применение к изучению фигурных чисел, а также к задачам теории вероятностей. Следует добавить, что такие же результаты независимо были получены Ферма.

Термин «комбинаторика» восходит к «Рассуждению о комбинаторном искусстве» (*Dissertatio de arte combinatoria*, Lipsiae, 1666) Лейбница, которое и положило начало этому отделу математики как самостоятельной науке и содержало ряд теорем о сочетаниях и перестановках, в том числе циклических. Тем же кругом задач занимались Бернар Френикль де Бесси в «Резюме о соединениях» (*Abrégé des combinaisons*, опубл. 1729) и Валлис в «Рассуждении о сочетаниях, перестановках и т. д.» (*Discourse of combinations, alternations etc.*, 1685). В работе Френикля де Бесси впервые изучаются перестановки с повторениями. Наиболее полное изложение комбинаторики в XVII в. дал во второй части «Искусства предположений», изданного в 1713 г., через восемь лет после смерти автора (см. стр. 94), Яков Бернулли; здесь впервые (после Леви бен Гершона) были изучены и размещения из n элементов по m , в которых соединения различаются не только по составу, но и по порядку элементов:

$$A_n^m = n(n-1)\dots(n-m+1) = C_n^m P_m.$$

При изучении свойств сочетаний и фигурных чисел Я. Бернулли встретился с суммированием ряда натуральных степеней натуральных

чисел $S_m = \sum_{k=1}^n k^m$. Выражения для S_1, S_2, S_3 были известны еще грекам, S_4 нашел Ибн ал-Хайсам. Уже встречавшийся нам ульмский математик И. Фаульгабер привел суммы сначала (1617) для первых одиннадцати, а затем в «Школе алгебры» (*Academia algebrae*, Ulm, 1631) и для семнадцати степеней. При этом он, вероятно, обнаружил постоянство m -й разности x^m , — в случае $\Delta^{20}(x^{20})$ он, во всяком случае, указал на это обстоятельство. Эти, как и другие аналогичные, наблюдения над свойствами арифметических рядов высших порядков, принадлежат, собственно, к исчислению конечных разностей, которое начало оформляться в отдельную науку лишь позднее (ср. стр. 157 и т. III, гл. 6). Ферма, по-видимому, располагал уже в 1636 г. общим правилом суммирования ряда S_m , но не изложил свой прием письменно. В «Искусстве предположений» Я. Бернулли, выписав сначала все S_m от $m=1$ до $m=10$, привел общее выражение

$$\begin{aligned} S_m = & \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{1}{2}n^m + \frac{1}{2} \frac{m}{1} An^{m-1} + \\ & + \frac{1}{4} \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} Bn^{m-3} + \frac{1}{6} \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} Cn^{m-5} + \\ & + \frac{1}{8} \frac{m(m-1)\dots(m-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 7} Dn^{m-7} + \dots, \end{aligned}$$

где показатели нисходят до n^2 или n . Числа $A, B, C, D, \dots$ представляют собой коэффициенты при n в разложениях для четного показателя S_{2m} , а именно:

$$A = \frac{1}{6}, \quad B = -\frac{1}{30}, \quad C = \frac{1}{42}, \quad D = -\frac{1}{30}, \quad E = \frac{5}{66}, \dots$$

Восемь первых таких чисел вычислил фактически в «Школе алгебры» Фаульгабер, но лишь Я. Бернулли выделил класс этих чисел и дал рекуррентное правило, позволяющее их последовательно вычислять: сумма всех коэффициентов в выражении S_m равна единице. Эйлер назвал числа $A, B, C, \dots$, взятые с положительным знаком, по имени Бернулли и показал их важные свойства и применения в теории конечных разностей. Теперь числами Бернулли нередко называют числа B_m , определяемые формулой

$$(B + 1)^m - B^m = m \quad (m = 1, 2, 3, \dots; B_0 = 1),$$

в которой после разложения двучлена B^m заменяют на B_r ; здесь числа $B_2, B_4, B_6 \dots$ совпадают с числами $A, B, C, \dots$ самого Я. Бернулли, $B_1 = 1/2$, а $B_3 = B_5 = B_7 = \dots = 0$.

Вероятностные задачи Паскаля и Ферма

До середины XVII в. в теории вероятностей не было никакого общего метода решения задач, не говоря уже о цельной математической теории. Умели только решать отдельные задачи, но был собран уже довольно обширный материал в различных областях человеческой деятельности. В середине XVII в. в разработку вопросов теории вероятностей были вовлечены крупнейшие ученые, в первую очередь Паскаль, Ферма и Гюйгенс.

Блез Паскаль (1623—1662) был разносторонним математиком, физиком — кто не знает «закон Паскаля», столь важный в гидротехнике, а также философом, религиозным мыслителем, мужественно боровшимся с иезуитами, и блестящим стилистом. Б. Паскаль родился в семье Клермон-Ферранского судьи Этьена Паскаля (1588—1654). В 1631 г. семья переселилась в Париж, где Этьен Паскаль вошел в кружок местных математиков и физиков. Этот любитель не был лишен научных дарований; его имя носит впервые изученная им «улитка Паскаля» — геометрическое место точек, лежащих на прямых пучка с центром на данной окружности так, что они удалены на постоянное расстояние по обе стороны от точек пересечения прямых и окружности. Это — кривая четвертого порядка. Дарование сына, намного превосходившего отца, проявилось очень рано, и еще мальчиком он вместе с отцом стал посещать ученые собрания. Имя Блеза Паскаля нам уже встречалось и встретится еще много раз. Сейчас упомянем только, что Блез в возрасте шестнадцати лет доказал теорему проективной геометрии, носящую его имя, а в восемнадцать лет изобрел суммирующий механизм.

В 1654 г. между Паскалем и Ферма возникла переписка по поводу ряда задач, в том числе и о разделении ставки. В этой переписке оба они, хотя и несколько разными путями, приходят к верному решению этой задачи. При решении они выработали вероятностный подход, деля ставку пропорционально вероятности выиграть всю ставку, если игра будет продолжена.

Метод решения Ферма можно установить из письма Паскаля к нему от 24 августа 1654 г. Письмо Ферма, в котором он излагает свой способ решения, не сохранилось. Решалась следующая задача. Пусть до выигрыша всей встречи игроку A недостает двух партий, а игроку B — трех партий. Как справедливо разделить ставку, если игра прервана?



Портрет молодого Блеза Паскаля, нарисованный его другом Ж. Домэ
(Национальная библиотека в Париже)

Ферма рассуждает следующим образом. Игра может продолжаться максимально еще четыре партии. Как могут протекать эти партии? Ферма составляет следующую таблицу, где выигрыш партии для A обозначается знаком «плюс» а для B — знаком «минус».

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
+	+	+	+	—	+	+	—	+	—	—	—	—	—	+	—
+	+	+	—	+	+	—	+	—	+	—	—	—	+	—	—
+	+	—	+	+	—	+	+	—	—	+	—	+	—	—	—
+	—	+	+	+	—	—	—	+	+	+	+	—	—	—	—

Из 16 возможных, первые 11 исходов благоприятны для выигрыша A всей встречи, а для выигрыша B благоприятны только 5 последних исходов. Следовательно, 11/16 ставки должен получить A , а B должен получить 5/16. Здесь наглядно видно, что Ферма предлагает разделить ставку про-

порционально вероятности выигрыша всей встречи (с нею и всей ставки). Паскаль решает задачу о разделении ставки на основе изучения свойств таблицы биномиальных коэффициентов, приведенной в его «Трактате об арифметическом треугольнике». Он складывает количество партий, недостающих игрокам *A* и *B*, и берет ту строку таблицы, в которой количество членов равно найденной сумме. Тогда доля игрока *A* будет равна сумме членов найденной строки начиная от 1, причем количество слагаемых равно числу партий, недостающих игроку *B*, а доля игрока *B* равна такой же сумме, но с количеством слагаемых, равным числу партий, недостающих игроку *A*. Например, игроку *A* недостает три партии, а игроку *B* — четыре партии, $3 + 4 = 7$. Выписываем строку, в которой находится семь чисел. Это будет: 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1. Доля игрока *A* будет $1 + 6 + 15 + 20 = 42$, а доля *B* — $1 + 6 + 15 = 22$. Следовательно, ставку нужно разделить в отношении $42/22 = 21/11$. При таком решении ставка делится пропорционально вероятностям выиграть всю ставку для игроков *A* и *B*.

Отметим еще, что Паскаль предполагал написать книгу «Математика случая», очевидно имея в виду систематизировать полученные им самим и Ферма результаты.

Теория вероятностей Гюйгенса

Первым руководством по теории вероятностей была книга великого голландского ученого Христиана Гюйгенса (1629—1695). Гюйгенс родился в Гааге в семье дипломата и поэта Константина Гюйгенса. Он обучался в университетах Лейдена и Бреды юриспруденции, но увлекся математикой и физикой. Этими занятиями руководил Франс ван Схоотен, связавший его с Декартом и Мерсенном. Гюйгенс работал в Гааге и продолжительное время в Париже, где с 1666 г. стал по предложению министра Кольбера первым президентом Академии наук.

Заслуги Гюйгенса в организации всей работы Академии, которой он руководил пятнадцать лет, очень велики; эти годы были весьма плодотворны и в научном творчестве Гюйгенса. Но когда в 1681 г. он для лечения выехал в Гаагу, ему пришлось расстаться с Францией навсегда: здесь в то время готовилась уже отмена Нантского эдикта 1598 г., представлявшего гугенотам — протестантской части населения — некоторую свободу вероисповедания и гражданские права. С отменой эдикта в 1685 г. жизнь протестантов (к которым принадлежал и Гюйгенс) во Франции надолго стала невозможной и множество гугенотов предпочло эмиграцию насильственному обращению в католичество.

Мы уже упоминали замечательный труд Гюйгенса «Маятниковые часы» (*Horologium oscillatorium*, Parisiis, 1673), содержащий, кроме описания этого изобретенного им еще в 1657 г. инструмента, важнейшие открытия в области механики и инфинитезимальной математики. Помимо этого сочинения, он опубликовал еще много других, среди которых законченный в 1678 г. «Трактат о свете» (*Traité de la lumière*, Leiden, 1690), содержащий изложение своеобразной волновой теории распространения света, имел для физика столь же первостепенное значение, как книга о часах с маятником для механика. В историю астрономии Гюйгенс вписал свое имя, установив при помощи усовершенствованных им самим телескопов, что Сатурн окружен кольцом и имеет спутника — Титана, обнаружив ту-



Христиан Гюйгенс .
(с портрета Г. Эделинка, хранящегося в библиотеке
Лейденского университета)

манность в созвездии Ориона и довольно точно определив время обращения Марса вокруг его оси.

Из математических трудов Гюйгенса мы сейчас остановимся на одном — «О расчетах в азартной игре» (*De ratiociniis in aleae ludo*), впервые вышедшем в качестве приложения к «Математическим этюдам» (1657, см. стр. 111) его учителя Ф. ван Схоотена. Гюйгенс написал это сочинение по-голландски, латинский перевод сделал Схоотен. В предпосланном этому сочинению письме к Схоотену Гюйгенс писал: «Я полагаю, что при внимательном изучении предмета читатель заметит, что имеет дело не только с игрой, но что здесь закладываются основы очень интересной и глубокой теории»¹. В этом замечании Гюйгенс показал глубокое понимание существа рассматриваемого вопроса.

Книга Гюйгенса выдержала ряд изданий и переводов и была фактически единственной по теории вероятностей до начала XVIII в. Она оказала большое влияние на многих ученых, в том числе и на Я. Бернулли.

¹ *Ch. Huygens. Oeuvres complètes*, v. 14, Hague, 1920, p. 58.

В начале своей книги Гюйгенс вводит понятие математического ожидания, а затем решает самые разнообразные задачи на справедливое разделение ставок при разном числе игроков и разном количестве недостающих партий. Кроме того, он вычисляет математические ожидания при решении различных задач, связанных с бросанием костей. Именно математическое ожидание явилось первым теоретико-вероятностным понятием. Так называемое классическое определение вероятности события

$$p = \frac{m}{n},$$

где m — число благоприятных для появления события случаев и n — число всех (равновозможных) случаев, фактически не раз применявшиеся Кардано и другими, было формально введено лишь Я. Бернулли. До этого, как можно полагать, вероятность оставалась, скорее, логическим, а не собственно математическим понятием.

Математическое ожидание Гюйгенс определил в следующих выражениях (не забудем, что речь шла об азартной игре): «Если число случаев, в которых получается сумма a , равно p и число случаев, в которых получается сумма b , равно q и все случаи могут получиться одинаково легко, то стоимость моего ожидания равна $\left(\frac{pa + qb}{p + q}\right)^1$ ».

Гюйгенс теоремами сложения и умножения вероятностей пользуется свободно (эти теоремы употребляли в том или ином виде начиная с Кардано).

Теория вероятностей как наука возникла в середине XVII в., когда были выработаны ее специфические понятия и методы, в первую очередь, когда стало применяться математическое ожидание. Хотя оно содержится в неявном виде и используется Паскалем и Ферма в их переписке, основная заслуга введения этого понятия и связанных с ним специфических методов решения задач принадлежит Гюйгенсу.

Статистические исследования

В этот же период появляются первые статистические работы так называемых политических арифметиков. И хотя сбор первых статистических сведений встречается начиная с античной древности (в очень примитивной форме), первые научные начала статистики были заложены только в том же XVII в.

Начало статистической науки было положено в первую очередь работами Джона Граунта (1620—1674) и Вильяма Петти (1623—1687). Эти работы в большой мере использовали бюллетени о естественном движении населения Лондона, которые велись с XVI в. Основная работа Граунта так и называется «Естественные и политические наблюдения над бюллетенями смертности» (*Natural and political observations upon the bills of mortality, London, 1662*). Граунт на статистическом материале установил ряд интересных закономерностей. В частности, он показал, что число родившихся мальчиков относится к числу родившихся девочек, как 14 к 13; что смертность человека больше в начале жизни; что относительная смертность от ряда болезней и случайностей устойчива и др. Граунт построил первую таблицу смертности.

¹ *Ch. Huygens. Oeuvres complètes, v. 14, p. 66.*



Эдмунд Галлей
(с портрета Т. Меррея, принадлежащего Лондонскому
Королевскому обществу)

Наиболее значительными работами Петти являются «Политическая арифметика» (Political arithmetic, 1676) и «Замечания относительно Дублинских бюллетеней смертности» (Notes upon the Dublin bills of mortality, 1683). В этих работах он подсчитывает необходимое количество людей различных профессий как в настоящее время, так и в будущем, величину необходимых налогов, величину народного богатства и доходов, количество населения Лондона и т. п.

Конечно, ни Граунт, ни Петти не пользовались теорией вероятностей, но применявшиеся ими понятия и методы, по существу, были тесно связаны с теорией вероятностей, а поставленные в них вопросы стимулировали развитие этой науки. Необходимая связь между статистикой и теорией вероятностей была установлена только Я. Бернулли.

Упомянутая выше книга Граунта открывала новое поле для приложений математического метода; вместе с тем в соответствии с духом времени обнаруженные демографические закономерности нередко полагали божественными. Позднее, в первой половине XVIII в., разграничение случайного (хаоса) и необходимого (божественного порядка) привело А. де Муавра к выводу «пределных теорем Муавра — Лапласа», а других

ученых — к установлению первых идей и методов собственно математической статистики. Находясь под непосредственным влиянием философии Ньютона, Муавр полагал, что отыскивает божественный порядок на Земле (в демографии) после того, как Ньютон отыскал его в системе мира.

Сам Ньютон, кажется, не имеет непосредственных заслуг в теории вероятностей, но в своей «Исправленной хронологии древних царств», над которой он работал почти до самой смерти, он систематически применял теоретико-вероятностные рассуждения о длительности правления династий (сумма случайных сроков правлений отдельных правителей) и отдельных правителей (среднее арифметическое этих сроков): «Судя по греческим летописцам... правители их нескольких городов... правили в среднем около 35 или 40 лет каждый... чему нельзя доверять. Ибо... правители в среднем правят около 18 или 20 лет каждый; и если в некоторых случаях они правят в среднем на 5 или 6 лет дольше, в других случаях они правят на столько же меньше; 18 или 20 лет является средним сроком»¹ (установленным Ньютоном по достоверным историческим источникам).

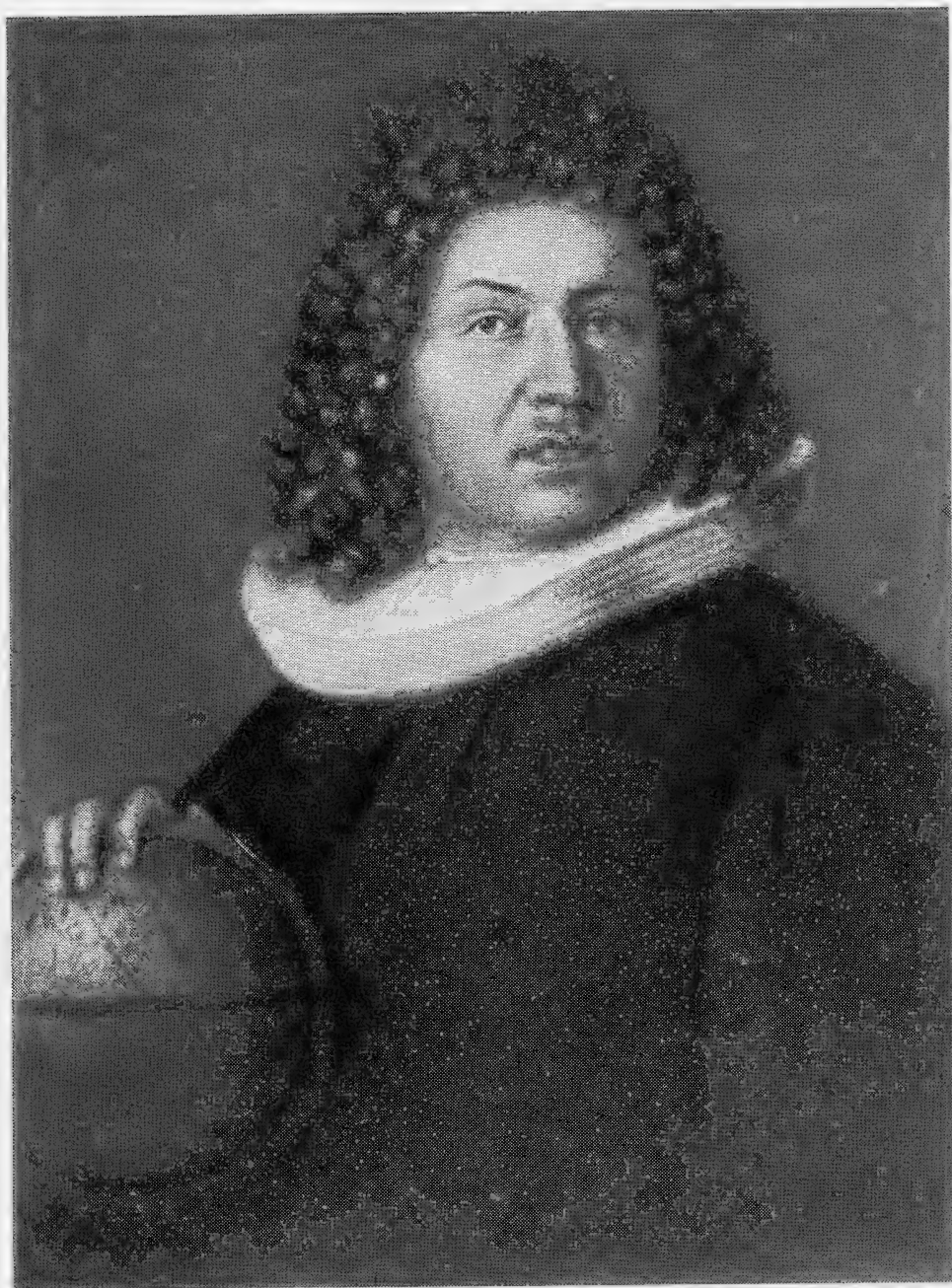
В описанном рассуждении Ньютона — первом приложении математического метода к истории — содержатся идеи, лежащие в основе закона больших чисел Я. Бернулли. Аналогичные идеи встречаются и у друга Ньютона, воспитанника и профессора Оксфордского университета, а затем директора Гринвичской обсерватории Эдмунда Галлея (1656—1742), особенно известного как астронома, — вспомним хотя бы о комете Галлея. При составлении своей таблицы смертности (*Philos. Trans.*, v. 17, 1694) Галлей выравнивал наблюдаемые значения смертности по возрастным группам, указав, что нерегулярности в этих наблюдениях «видимо, вызваны случаем» и были бы сглажены при «намного большем» числе лет наблюдений. Тем самым Галлей не только высказал мысль о сближении частот и соответствующих вероятностей, которая по свидетельству Я. Бернулли была широко распространена — ее высказал еще Кардано (см. стр. 83), — но и использовал ее практически.

Добавим, что в астрономической переписке и оптических работах Ньютона содержатся отдельные элементы теории ошибок.

«Искусство предположений» Якова Бернулли

Новый этап в истории теории вероятностей начался с Якова Бернулли. Я. Бернулли (1654—1705) принадлежал к протестантскому роду, переехавшему в конце XVI в. из-за религиозных гонений в Швейцарию. По воле своего отца, городского советника в Базеле, Николая Бернулли (1623—1708) Я. Бернулли прошел полный курс философии и богословия. Однако, вопреки родительским настояниям, он решил всецело посвятить себя математическим наукам — занятию, которое отнюдь не сулило в тогдашней Швейцарии выгодной карьеры: работа даже университетского преподавателя математики оплачивалась скудно, да и должностей таких было крайне мало. Несколько лет молодой человек, самоучкой овладевавший математикой, учительствовал в частных домах. Побывав во Франции, Голландии и Англии и всюду завязав научные знакомства, Я. Бернулли

¹ *I. Newton. The chronology of ancient kingdoms amended. London, 1728, p. 52.*



Яков Бернулли
(с портрета, сделанного в 1686 г. его братом Николаем и хранящегося
в Базельском музее естествознания и этнологии)

с 1683 г. приступил к чтению лекций в Базельском университете сначала по физике, а затем по математике.

На 80-е годы приходятся важные исследования Я. Бернулли по теории рядов и теории вероятностей. В это же время он успешно занимался инфинитезимальными задачами, а после выхода в свет мемуара Лейбница о дифференциальном алгоритме (1684) первый правильно оценил его значение и стал первым же последователем нового исчисления бесконечно малых. В этой области ему, как и его младшему брату и ученику Иоганну, принадлежат выдающиеся заслуги. Конец жизни Я. Бернулли был омрачен спорами с братом о приоритете в некоторых открытиях; впрочем, их соревнование в решении ряда трудных задач анализа имело и положительные результаты. Я. Бернулли скончался в 1705 г., после чего его кафедру занял Иоганн. Среди учеников Я. Бернулли, кроме брата, вы-

Титульный лист «Искусства предположений» Я. Бернулли
(Базель, 1713)

JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruff. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.



BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
c10 Ёсс XIII.

489

деляются еще их племянник Николай I Бернулли (1687—1759), профессор математики в Падуге (1716) и логики (1722), а затем права в Базеле, а также механик и математик Я. Германи, один из первых членов Петербургской академии наук. Учеником Я. Бернулли был, между прочим, Пауль Эйлер — отец знаменитого математика.

Семья Бернулли дала многих выдающихся ученых, в том числе математиков, которые нередко носили одинаковые имена. Поэтому носителей одного имени различают, как королей, порядковыми номерами. Сыновья и ученики Иоганна I, рано скончавшийся Николай II (1695—1726) и Даниил I, работали некоторое время в Петербурге, так же как его внук, специалист по механике, Яков II (1759—1789), сын базельского профессора физики Иоганна II (1710—1790). Члены рода Бернулли проживают в Базеле и в настоящее время.

В теории вероятностей творчество Я. Бернулли было основополагающим. Его открытия в этой области изложены в «Искусстве предположений» (*Ars conjectandi*), посмертно изданном Николаем I Бернулли в Базеле в 1713 г.

Книга Я. Бернулли состоит из четырех частей. Первую часть составляет упоминавшееся сочинение Гюйгенса (стр. 89), но Бернулли почти ко всем предложениям Гюйгенса дает свои примечания, иногда более существенные, чем самые предложения. О второй части книги, посвященной разработке комбинаторики, уже говорилось, в третьей части решаются разнообразные задачи по теории вероятностей. Основная часть книги — это четвертая часть. В ней Я. Бернулли прежде всего высказывает общие соображения о природе случайных событий, а затем выводит носящую теперь его имя теорему, лежащую в основе всех последующих исследований о закономерностях случайных массовых явлений. Теорема Бернулли явилась первой и простейшей в цепи предложений, образующих закон больших чисел, — этот термин предложил в 1835 г. французский математик С. Пуассон. Вместе с теоремой Муавра — Лапласа (см. т. III, гл. 4) и ее обобщениями закон больших чисел принадлежит к числу предельных теорем теории вероятностей, принципиальное значение которых в том, что на них основаны все применения этой науки к природным и общественным явлениям.

Сам Я. Бернулли формулировал свою теорему, установленную им не позднее 1689 г., в следующих словах: «Пусть число благоприятных случаев относится к числу неблагоприятных точно или приближенно, как r к s , или к числу всех случаев, как r к $r + s$ или r к t , каковое отношение заключается в пределах $\frac{r+1}{t}$ и $\frac{r-1}{t}$. Требуется доказать, что можно взять столько опытов, чтобы в какое угодно данное число раз (c раз) было вероятнее, что число благоприятных наблюдений попадет в эти пределы, а не вне их, т. е. что отношение числа благоприятных наблюдений к числу всех будет не более, чем $\frac{r+1}{t}$, и не менее, чем $\frac{r-1}{t}$ »¹.

А. А. Марков (1856—1922), которому принадлежат крупнейшие заслуги в теории вероятностей, писал: «Свою теорему Я. Бернулли высказал точно и доказал с полной строгостью, хотя и при ограничительном условии, которое нетрудно устранить»². Теперешняя формулировка теоремы

¹ Часть четвертая сочинения Якова Бернулли «*Ars conjectandi*». Перевод Я. В. Успенского. СПб., 1913, стр. 37.

² Там же, стр. V.

такова: если вероятность наступления события A в последовательности независимых испытаний постоянно равна p , то каково бы ни было $\varepsilon > 0$ с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, можно утверждать, что при достаточно большом числе испытаний $n(\varepsilon)$ разность $\frac{m}{n} - p$, где m — число наступлений A , по абсолютной величине окажется меньше, чем ε . Это можно записать так: $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

На практике мы наблюдаем только частоту m/n , и теорема Бернулли является тем звеном, которое связывает статистические наблюдения с теорией вероятностей. Это было ясно автору «Искусства предположений». Он намеревался дать приложения теории вероятностей к вопросам статистики народонаселения, которая в то время начала привлекать большое внимание, но в этом ему помешала смерть. Как видно из его переписки с Лейбницем, Я. Бернулли интересовала и теория ошибок.

Применение статистических частот m/n взамен «классической» вероятности было широко распространено, особенно в статистике народонаселения. В одном письме 1669 г.¹ Гюйгенс даже построил непрерывную кривую убывания числа остающихся в живых современников с возрастом, т. е. в его толковании убывания вероятности $p(x)$ новорожденному дожить до возраста x . Используя для этого табличные данные Грауна и построив по ним свою кривую, Гюйгенс не искал ее аналитического выражения. Но в принципе это была первая непрерывная кривая плотности вероятности, причем вероятностями служили именно статистические частоты. Хотя ни один автор до нашего современника Р. Мизеса не предложил формального «частотного» определения вероятности, фактически такое понимание дела широко использовалось и в этом смысле является не менее «классическим».

Добавим, что и геометрические вероятности применялись уже в XVII в. в одной, оставшейся неизвестной вплоть до наших дней рукописи Ньютона² и в упомянутом выше мемуаре Галлея 1694 г. Проведя все свои выводы аналитически, Галлей, пожалуй из подражания древним математикам, повторил эти выводы геометрически (даже в трехмерном пространстве).

Рассматривая соотношение случайности и необходимости, Я. Бернулли стоит на позиции детерминизма и отрицает объективную случайность. Он говорит: «Нельзя сомневаться... относительно событий будущего, которые ... если и не по некоторой неизбежной необходимости, то в силу божественного предвидения или предопределения не могут не осуществиться в будущем; ибо если не наверно случится то, чему определено случиться, то непонятно, как может остаться непоколебленной хвала всеведению и всемогуществу величайшего Творца. Каким образом, однако, эта достоверность будущего может быть согласована со случайностью... об этом пусть спорят другие»³. И в другом месте: «Если бы наблюдения над всеми событиями продолжать всю вечность (причем вероятность, наконец, перешла бы в полную достоверность), то было бы замечено, что все в мире управляется точными отношениями и постоянным законом изменений, так что даже в вещах, в высшей степени случайных, мы принуждены были

¹ Ch. Huygens. Oeuvres complètes, v. 6, 1895, p. 530.

² J. Newton. Mathematical papers, v. 1 (1664—1666). Cambridge, 1967. Ed. D. T. Whiteside, p. 58—61.

³ Часть четвертая сочинения Якова Бернулли «Ars conjectandi», стр. 1.

бы признать как бы некоторую необходимость и, скажу я, рок»¹. Таким образом, случайность была в глазах Я. Бернулли субъективной категорией, понятием, к которому мы вынуждены обращаться лишь из-за неполноты наших знаний. При этом детерминизм соединялся у него, как и у многих мыслителей той эпохи, с верой в бога.

Незадолго до выхода «Искусства предположений» появилось еще несколько сочинений по теории вероятностей, впрочем гораздо менее знаменательных. Так, Николай I Бернулли под очевидным влиянием труда своего дяди выпустил «Примеры искусства предположений в применении к правовым вопросам» (*Specimina Artis conjectandi ad quaestiones Juris applicatae*, Basileae, 1709), — речь шла об оценке свидетельских показаний, выборах по жребию, страховых задачах и пожизненных рентах. Этот последний круг вопросов выдвигался в то время на видное место, а вместе с ним и демографическая статистика, занимавшая и Я. Бернулли. Таблицы смертности, значение которых было очевидно (об этом писал, в частности, в 1669 г. Гюйгенс), составлены Я. де Виттом (1671) и более совершенным образом Э. Галлеем (1694). Уже упоминавшиеся расчеты Галлея были в 1699 г. использованы для организации вдовьей и сиротской касс в Лондоне. Демографической статистикой и ее приложениями успешно занимался в Англии и Муавр, о работах которого по теории вероятностей еще будет сказано далее (см. т. III, гл. 4).

¹ Часть четвертая сочинения Якова Бернулли «*Ars conjectandi*», стр. 40.

ШЕСТАЯ ГЛАВА

ГЕОМЕТРИЯ

Алгебраические методы в геометрии

Применение алгебры в геометрии имело к началу XVII в. долгую историю. Еще древние вавилоняне решали многие задачи на прямоугольные треугольники, выражая искомые отрезки, как корни численных квадратных уравнений; аналогичные приемы употреблялись впоследствии неоднократно. В классической Греции важным средством геометрического исследования, в частности конических сечений, служила геометрическая алгебра, в которой место вычислений занимали построения отрезков.

Бурные успехи символической и числовой алгебры в XVI в. явились основой гораздо более обширных приложений алгебраического метода в геометрии, приведших к созданию новой аналитической геометрии. Первоначально работы в этом направлении не выходили за пределы традиционных постановок и решений вопросов, иногда довольно сложных. Большое число таких задач было рассмотрено Виетом, за которым последовали и другие, например Марин Гетальдич (Гетальди, 1566—1627), уроженец югославского города Дубровник (Рагуза), в то время бывшего самостоятельной республикой. Ученик Хр. Клавия и хороший знаток греческих авторов, Гетальди испытал особенно сильное влияние Виета, с которым познакомился в бытность в Париже. В «Собрании различных задач» (*Variorum problematum collectio, Venetiae, 1607*) и посмертно изданном труде «О математическом анализе и синтезе» (*De resolutione et compositione mathematica, Romae, 1630*) Гетальди средствами алгебры Виета решает разнообразные задачи на деление отрезков, построение треугольников и так называемые вставки (ср. т. I, стр. 84); по большей части его задачи выражаются уравнениями первой или второй степени относительно искомого неизвестного отрезка. В некоторых случаях применяется чисто геометрическое решение. Упомянем античную задачу о вставке между продолжением стороны квадрата и ближайшей перпендикулярной сторовой отрезка данной длины, продолжение которого проходит через вершину квадрата, не лежащую на названных сторонах. Гетальди отнес задачу к тем, которые не относятся к алгебре (*sub algebram non cadunt*), и решил ее геометрически. Данная задача привлекла внимание и других ученых. Жирар (1629) выразил ее уравнением четвертой степени и показал, как связан выбор знаков перед радикалами, входящими в его корни, с положением частей искомого отрезка. Декарт (1637) рассмотрел ее с целью привести пример уравнения четвертой степени, распадающегося на два квадратных (коэффициенты которых, между прочим, квадратично пр-

рациональны относительно исходных коэффициентов). Попутно Декарт указал, как от более или менее удачного выбора неизвестной зависит сравнительная простота уравнения. Эти соображения Декарта подробнее развиты во «Всеобщей арифметике» Ньютона. Оригинальное решение принадлежит еще Гюйгенсу.

Алгебраическим решением геометрических задач занимались, как видно, очень многие. К уже названному можно добавить, например, имя английского алгебраиста Вильяма Отреда (1574—1663), на книге которого, озаглавленной, подобно одному из сочинений ал-Каши, «Ключ математики» (*Clavis mathematicae*, Londini, 1634)¹, отразилось несомненное влияние «Собрания различных задач» Гетальди.

Аналитическая геометрия

Описанная алгебраическая трактовка вопросов геометрии подготовляла почву для создания аналитической геометрии, предметом которой является уже не только нахождение отдельных отрезков, выражаемых корнями уравнений с одним неизвестным, но изучение свойств различных геометрических образов, прежде всего алгебраических линий и поверхностей, выражаемых уравнениями с двумя или более неизвестными или координатами.

Координаты появились еще в древности, притом в различных формах, между собой непосредственно не связанных. С одной стороны, это были географические координаты, именовавшиеся долготой ($\mu\eta\chi\omicron\varsigma$ — «длина») и широтой ($\pi\lambda\acute{\alpha}\tau\omicron\varsigma$ — «ширина»), причем положение пунктов земной поверхности, изображенной в виде прямоугольника, характеризовалось парой чисел. Сходными были астрономические координаты, служившие для определения положения светил на небесной сфере. Другой вид координат представляли собой отрезки, зависимости между которыми, так называемые симптомы (см. т. I, 130), выражали определяющие свойства этих кривых. В этом случае речь шла не о числовых координатах любых точек с отсчетом от фиксированного меридиана и параллели, а об отрезках диаметров и хорд, связанных с точками рассматриваемой фигуры.

Своеобразной разновидностью координат были отрезки широт и долгот в теории изменения форм Орема. Здесь не было ни числовых координат любых точек, ни «симптомов», выраженных средствами геометрической алгебры; словесно сформулированная зависимость между широтой и долготой формы изображалась плоской линией.

Координатные отрезки древнегреческой геометрии стали известны в Европе частью по арабским сочинениям, но главным образом по трудам Архимеда и особенно Аполлония. Параллельные хорды или полухорды, сопряженные некоторому диаметру, Аполлоний называл, если перевести с греческого, «по порядку проведенными линиями», а отрезки этого диаметра от его конца до хорды — «отсеченными на диаметре по порядку проведенными (линиями)» (на рис. 6 соответственно y и x). В своем упоминавшемся ранее латинском издании «Конических сечений» (Венеция, 1566)

¹ В первом издании этот весьма распространенный в XVII в. труд назывался «Основы арифметики в числах и видах» (*Arithmeticae in numeris et speciebus institutio*).

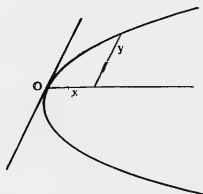


Рис. 6

Федерико Коммандино первые выражения передал оборотом *ordinatim applicatae*, т. е. «по порядку приложенные» (т. е. направленные)¹, а второе — *quae ab ipsis ex diametro ad verticem abscinduntur*, т. е. «которые отсекаются ими на диаметре от вершины». Отсюда берут начало термины *abscissa*, т. е. «отсеченная», *ordinata* и *applicata*, которые, впрочем, укоренились не сразу. Слово «абсцисса», встречавшееся в смысле отрезка у различных авторов, например Кавальери (1635), становится техническим термином координатной геометрии в 1668 г. у Микеланджело Риччи (1619—1692) и особенно у Лейбница, начиная с рукописей 1673 г. Ферма и Декарт в своих основополагающих сочинениях по аналитической геометрии (1636—1637) писали еще об «отрезках диаметра». Слово «ордината» в нашем смысле применял другой переводчик на латынь «Конических сечений» — Франческо Мавроликко. Ферма пользовался термином *applicata*, Декарт — *appliquée par ordre*, т. е. французским переводом *ordinatim applicata*, но также (в письме 1638 г.) словом *ordonnée*, которое незадолго перед тем в 1637 г. употребил в своем курсе П. Эригон (в латинском тексте 1644 г. — *ordinata*); затем им стал регулярно пользоваться Лейбниц.

В середине XVIII в. слово «ордината» начинает вытеснять в геометрии на плоскости слово «аппликата». Обе координаты первоначально назывались неизвестными величинами, как у Ферма, или неопределенными, как у Декарта; слово «координаты» ввел в 1692 г. Лейбниц, имея в виду уже любые криволинейные координаты. Но еще и позднее понятие о координатах связывалось с отрезками диаметров и хордами плоских кривых. Так обстоит, например, дело в статьях «*Abscissa, die Abscisse*» и «*Ordinatae, ordinatim applicatae, die Ordinaten*» «Математического словаря» (*Mathematisches Lexicon*, Leipzig, 1716) Хр. Вольфа (ср. стр. 35).

Термин «ось», который у Аполлония относился к взаимно перпендикулярным сопряженным диаметрам, употребил в более широком смысле И. Барроу (1670). Обозначение начальной точки буквой *O* восходит к ее

¹ Еще в переводе арабского трактата Ибн ал-Хайсама о параболических зеркалах, сделанном в XII в., употребляется оборот *linea secundum ordinem*, т. е. «линия по порядку». Н. Орем в середине XIV в. писал о перпендикулярно приложенных отрезках — *perpendiculariter applicatae*.

наименованию *origine* — «начало», данному Ф. Лагиром в 1679 г.; двадцатью годами ранее Я. де Витт писал об *initium immutabile*, неподвижном начале. Декарт еще говорил о точке, с которой начинаются вычисления.

Вернемся от истории терминологии к истории геометрических методов и идей.

Аналитическая геометрия Ферма

К разработке начал новой аналитической геометрии независимо друг от друга и одновременно приступили оба крупнейших французских математика XVII в. — Ферма и Декарт. Небольшое «Введение в изучение плоских и телесных мест» (*Ad locos planos et solidos isagoge*) Ферма было написано несколько ранее 1637 г., но при жизни Ферма распространялось через Мерсенна и других только в рукописном виде. Напомним, что «плоские и телесные места» — термины греческой геометрии — означали прямые и окружности и соответственно эллипсы, параболы и гиперболы. Работа написана в обозначениях Виета с соблюдением однородности уравнений.

Ферма формулирует принцип аналитической геометрии следующим образом: «Всякий раз, когда в заключительном уравнении имеются две неизвестные величины (*quantitates ignotae*), налицо имеется место, и конец одной из них описывает прямую или же кривую линию... Для установления уравнений удобно расположить обе неизвестные величины под некоторым заданным углом (который мы большей частью принимаем прямым) и задать положение и конец одной из величин»¹. Как мы видим, под неизвестными величинами (координатами) Ферма понимает прямолинейные отрезки; первую из них он всякий раз обозначает *NZ* и алгебраически буквой *A*, а вторую соответственно *ZI* и *E*. Затем по порядку рассматриваются различные плоские и телесные места.

Уравнение прямой, проходящей через начальную точку, Ферма выводит в форме

$$D \text{ на } A \text{ равно } B \text{ на } E,$$

т. е. $dx = by$ (на рис. 7 нанесена лишь часть прямой *NI*, так как Ферма пользуется положительными координатами). К этому случаю приводится общее уравнение первой степени (с указанным ограничением) и несколько далее однородное уравнение второй степени, причем здесь говорится лишь об одной из двух возможных прямых. Первое приведение по существу состоит в преобразовании координат, именно в параллельном сдвиге вдоль горизонтальной оси: от уравнения вида $c - dx = by$ Ферма переходит к $d(r - x) = by$, где $dr = c$. Идею преобразования координат путем параллельного переноса системы Ферма более отчетливо выражает в следующих примерах: установив сначала, что в прямоугольной системе уравнение окружности с центром в начальной точке есть $b^2 - x^2 = y^2$, он правильно характеризует общее уравнение окружности и для образца преобразует к основной форме уравнение

$$b^2 - 2dx - x^2 = y^2 + 2ry.$$

¹ П. Ферма. Введение в изучение плоских и пространственных мест. В книге: Р. Декарт. Геометрия, стр. 137—138.

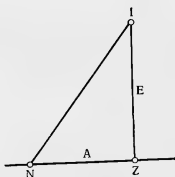


Рис. 7

Для этого он производит дополнение до квадрата

$$p^2 - (x + d)^2 = (y + r)^2, \text{ где } p^2 = r^2 + b^2 + d^2,$$

затем пишет снова x вместо $x + d$ и y вместо $y + r$ и получает

$$p^2 - x^2 = y^2.$$

Следует заметить все же, что Ферма обходит молчанием вопрос об отрицательных координатах, какими оказываются координаты центра $(-d, -r)$ в данной задаче (ибо d и r у него положительные). Разумеется, построить центр для него не представляло труда и в этом случае.

Основные уравнения конических сечений представляют собой у Ферма непосредственное выражение в терминах алгебры их свойств, известных по труду Аполлония. Для параболы это уравнения $x^2 = dy$ и симметричное $y^2 = dx$, для эллипса $(b^2 - x^2)/y^2 = \text{const}$ (указывается, что в случае непрямого координатного угла кривая будет эллипсом и при $\text{const} = 1$), для гиперболы $(b^2 + x^2)/y^2 = \text{const}$. Любопытно, что на рисунке в последнем случае изображены обе ветви гиперболы, хотя опять-таки об отрицательных координатах ничего не сказано. Кроме того, приводится уравнение равносторонней гиперболы $xy = c$. Все это распространяется на соответствующие уравнения, дополненные линейными членами.

На частном примере уравнения $b^2 - 2x^2 = 2xy + y^2$ Ферма разбирает и наиболее трудный случай, когда группа старших членов содержит и член с произведением координат. Его выкладки и построения соответствуют переходу к новой системе координат X, Y с прежним началом и осью ординат и с осью абсцисс, образующей угол 45° со старой. В этой системе $X = \sqrt{2}x$, $Y = x + y$, так что $(2b^2 - X^2)/Y^2 = 2$ и фигура есть эллипс.

Изложив все это, Ферма писал: «Таким образом мы коротко и ясно изложили все, что оставили невыясненным древние относительно плоских и телесных мест»¹. На самом деле был сделан лишь первый шаг к созданию нового типа геометрии, которая, между прочим, получила свое нынешнее наименование лишь в самом конце XVIII в.²

¹ См. Р. Декарт. Геометрия, стр. 146.

² Термин «аналитическая геометрия» в применении к любым геометрическим приложениям алгебры употреблялся в XVIII в. не раз. В более специальном смысле, совпадающем с общепринятыми в XIX в., его начал применять С. Ф. Лакруа, а первую книгу, озаглавленную «Начала аналитической геометрии» (Éléments de géométrie analytique. Paris, 1801), опубликовал профессор Политехнической школы Ж. Г. Гарнье (1766—1840).

Аналитическая геометрия Декарта

«Введение» Ферма, долгое время остававшееся в рукописи, не нашло того широкого распространения, какое получила «Геометрия» Декарта, изданная в 1637 г. О влиянии «Введения» на Декарта не может быть речи. Мы говорили уже, что все основные идеи «всеобщей математики», как в алгебраической, так и в геометрической части, имелись у ее творца не позднее 1632 г.

Изложение аналитической геометрии у Декарта во многом отличается от данного Ферма. В одном оно уступает, ибо разбросано по всем трем книгам «Геометрии» и даже во второй из них, содержащей наиболее важные элементы новой дисциплины, не имеет систематического характера, как во «Введении». Но в других отношениях геометрия Декарта имела решительные преимущества. Не говоря уже о том, что Декарт применял более развитую символику, что его изложение было доступнее и богаче примерами, он выдвинул несколько общих идей и предложений, весьма существенных для последующего.

Один из основных вопросов для Декарта заключался в следующем: какие линии служат предметом геометрии? Ответ определялся верой Декарта в то, что единственным общим методом математики является алгебраический. Сначала этот ответ формулируется в кинематических выражениях: геометрические линии — это те, которые «описаны непрерывным движением или же несколькими такими последовательными движениями, из которых последующие вполне определяются им предшествующими, — ибо этим путем всегда можно точно узнать их меру»¹. Напротив, из геометрии, т. е. собственно всеобщей математики, исключаются механические линии, описываемые «двумя отдельными движениями, между которыми не существует никакого отношения, которое можно было бы точно измерить»². Примеры механических линий — спираль и квадратура: в качестве примера геометрических приводятся кривые, описываемые некоторым шарнирным механизмом, число звеньев которого можно неопределенно увеличивать. Этот механизм, по идее сходный с мезолабием, предложенным Эратосфеном в III в. до н. э. для построения двух средних пропорциональных, Декарт изобрел между 1619 и 1621 гг.: в третьей части «Геометрии» показано, как можно с его помощью строить любое число средних пропорциональных между двумя данными отрезками

$$a : x_1 = x_1 : x_2 = x_2 : x_3 = \dots = x_n : b.$$

Уравнения описываемых этим прибором линий

$$r^2(x^2 + y^2)^{2n-1} = x^{4n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Декарт не привел ни в общем виде, ни для частных значений n .

Кинематическое образование линий являлось отправным пунктом геометрии Декарта и применяется в ней неоднократно. Конечно, данная им при этом кинематическая характеристика геометрических линий как кривых, описываемых одним или несколькими непрерывными движениями, последовательно определяющими друг друга, не вполне отчетлива,

¹ Р. Декарт. Геометрия, стр. 30.

² Там же, стр. 30—31.

так же как и заявление, что для проведения всех таких линий «нужно только то предположение, что две или несколько линий можно перемещать вдоль друг друга и что их пересечения образуют другие линии»¹. Но в этих утверждениях, по сути дела, Декарт предвосхитил уже упомянувшуюся важную теорему английского ученого А. Кемпе (1876), согласно которой посредством плоских шарнирных механизмов можно описать дуги любых алгебраических кривых и нельзя описать ни одной трансцендентной. Свой кинематический способ деления линий на геометрические и механические Декарт тотчас облекает в более ясную аналитическую форму и здесь же предлагает классификацию первых. «Все точки линий,— пишет он,— которые можно назвать геометрическими, т. е. которые подходят под какую-либо точную и определенную меру, обязательно находятся в некотором отношении ко всем точкам прямой линии, которое может быть выражено некоторым уравнением, одним и тем же для всех точек данной линии»². В этом поистине замечательном по глубине месте своего сочинения Декарт вводит и метод прямолинейных координат и понятие об уравнении кривой, а вместе с тем понятие о функции как аналитическом выражении, составленном из «неопределенных» отрезков x и y . Несколько перед тем Декарт объяснил, как описывать кривую или, вернее, строить любое число ее точек, вычисляя значения x по данным значениям y ,— первой координатой у него служила y .

В 1684 г. Лейбниц назвал геометрические кривые Декарта алгебраическими, а механические — трансцендентными, мотивируя отказ от терминологии Декарта тем, что и механические линии не подлежат исключению из геометрии.

Непосредственно за изложенными общими соображениями Декарт приводит первую общую классификацию алгебраических кривых в зависимости от степени их уравнений, отнеся к роду n кривые с уравнениями степени $2n - 1$ и $2n$. Классификация требовалась прежде всего для всеобщей математики Декарта (стр. 30), а также была нужна в аналитической геометрии. Предложенное Декартом разделение кривых по родам, себя не оправдавшее, мотивировалось тем, что, по его мнению, кривые с уравнением степени $2n$ вообще не сложнее, чем с уравнением степени $2n - 1$. Все трудности, связанные с четвертой степенью, писал он, приводятся к третьей, а трудности, связанные с шестой степенью, — к пятой и т. д. Общепринятой классификацией плоских кривых по порядкам мы обязаны Ньютону.

Но классификация кривых в прямолинейных координатах по родам или порядкам имеет смысл, если род или порядок кривой не зависит от выбора координатной системы. Это было Декарту ясно, и он, правда мимоходом, но вполне отчетливо, сформулировал фундаментальное предложение об инвариантности рода кривой при замене одной системы прямолинейных координат другой: «Действительно, хотя для получения более короткого и удобного уравнения и нужен весьма тщательный выбор, но все же, какими бы прямую и точку ни взяли, всегда можно сделать так, чтобы линия оказалась того же самого рода: это легко доказать»³. Впрочем, доказательство не приводится, да и формулы линейного преобразования координат у Декарта еще отсутствовали.

¹ Р. Декарт. Геометрия, стр. 30

² Там же, стр. 33.

³ Там же, стр. 34.

ского издания «Геометрии»). Заменяя прямую CNK другими линиями, можно получать таким образом бесконечное множество кривых. Так, если CNK есть окружность с центром L , то будет описана конхоида (несомненно, что прием Декарта является как раз обобщением античного определения конхоиды), а если CNK есть парабола с диаметром KB , то возникает кривая второго рода, именно та, которую Ньютон впоследствии назвал трезубцем (ср. далее стр. 108). Вообще, заявляет Декарт, если образующая кривая имеет род n , то описанная линия будет рода $n + 1$. Это одна из немногих ошибок Декарта, который не довел, видимо, до конца легкие, по его собственным словам, вычисления. На самом деле, если в подвижной системе координат $CB = y$, $BL = x'$, уравнение линии CNK есть

$$f(x', y) = 0,$$

то кривая ECG имеет в прежних координатах уравнение

$$f\left(\frac{xu}{a-y}, y\right) = 0.$$

Неточность Декарта показал на частном примере еще Ферма.

В рассмотренном только что примере нарисованы две взаимно перпендикулярные координатные оси, хотя и не в обычном для нас положении. Однако чаще всего Декарт, так же как Ферма и ближайшие поколения их последователей, чертил только одну ось с начальной точкой и указывал направление других координат, вообще говоря наклонных. Отрицательные абсциссы не рассматривались, что иногда приводило к неточным или неполным чертежам. Эти замечания не относятся к Ньютону или Лейбницу, но правильное различение знаков координат и применение обеих осей стало обычным делом уже в XVIII в.

Силу своего метода Декарт затем демонстрирует на предложенной ему Я. Гоолем задаче Палпа о геометрическом месте к $2n$ или $2n - 1$ прямым, которое определяется следующим образом: даны $2n$ (или $2n - 1$) прямых, требуется найти геометрическое место таких точек, чтобы произведение отрезков, приведенных от них под данными углами к n из этих прямых, находилось в данном отношении к произведению аналогичных отрезков, проведенных к остальным n (или $n - 1$) прямым. Древние знали, что при $n = 2$ геометрическое место есть коническое сечение, но не оставили анализа и этого случая: случай же $n > 2$ остался нерассмотренным. Если мы запишем уравнение прямых в виде $a_k x + b_k y + c_k = 0$, то длины проведенных к ним отрезков d_k пропорциональны левым частям этих уравнений, и для нас отсюда ясно, что уравнение места будет, вообще говоря, кривой порядка n . Декарт, получив выражения для d_k в выбранной им косугольной координатной системе из геометрических соображений, приходит к тому же общему результату. Более подробно он рассмотрел случаи $n = 2$ и $n = 3$. Это прежде всего место к трем или четырем прямым, исследование которого дает ему повод исследовать уравнение второго порядка, весьма общего, хотя и не самого общего вида. Пусть данные прямые суть AB , AD , EF и GH , причем углы, образуемые с ними отрезками CB , CD , CF и CH , проведенными из точек C искомого геометрического места, определяемого условием $CB \cdot CF = CD \cdot CH$, известны (рис. 8). Декарт принимает одну из данных и одну из проведенных линий, именно AB и BC , за оси $AB = x$, $BC = y$ и обозначает данные длины отрезков $EA = k$, $AG = l$. Данными являются также углы треугольников на

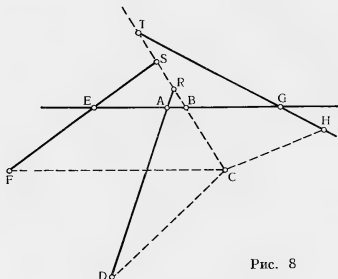


рис. 8, а значит, отношения их сторон $AB : BR = z : b$, $CR : CD = z : c$ и т. д., где $z, b, c, \dots$ суть данные отрезки (Декарт не вводит синусы углов). После этого все нужные отрезки выражаются через $x, y, z, b, c, \dots, k, l$ линейно относительно x и y :

$$CB = y, \quad CD = \frac{czy + bcx}{zz}, \quad CF = \frac{czy + dek + dex}{zz},$$

$$CH = \frac{gzy + fgl - fgx}{zz},$$

а условие $CB \cdot CF = CD \cdot CH$ выражается уравнением второй степени без свободного члена, решение которого относительно y , после введения некоторых сокращенных обозначений, дает

$$y = m - \frac{n}{2}x + \sqrt{m^2 - 2mx - \frac{p}{m}xx}.$$

Однородность полученного уравнения объясняется принятыми для отношений сторон выражениями и, в сущности, не была в глазах Декарта объяснительной (ср. стр. 42), но представляла в данном случае то удобство, что в принципе позволяла сразу строить одни отрезки по другим. В приводимом несколько далее числовом примере однородность относительно буквенных величин не соблюдается в отличие от примера Ферма, в алгебре примыкавшего к Виету (ср. стр. 102).

Опираясь на теоремы I книги «Конических сечений» Аполлония, Декарт показывает, что полученное уравнение принадлежит коническому сечению, а в особых случаях, когда радикал обращается в нуль или корень извлекается нацело, оказывается прямой линией: в самостоятельном виде уравнение прямой отсутствует и о «вырождении» кривой второго порядка в пару прямых ничего не говорится. В ходе анализа выясняется, при каких знаках коэффициентов получаются парабола, гипербола и эллипс, в частности окружность, и определяются положение и форма конического сечения — в случае параболы вершина, диаметр и «прямая

бола обращена вершиной в другую сторону. Чертеж в «Геометрии» недостаточно отчетливо изображает вторую часть трезубца, который состоит из двух отдельных линий, имеющих каждая — в терминологии Ньютона — гиперболическую ветвь с асимптотой AB и параболическую ветвь, лишенную асимптоты. Как и должно быть, кривая пересекает на чертеже горизонтальную ось при значениях $y = -a$, $y = a$, $y = 2a$, но точка перегиба у части, лежащей справа от асимптоты, не обозначена.

Большое место занимают в «Геометрии» исследование оптических овалов (см. стр. 32), рассматриваемых в биполярных координатах, и проведение нормалей (см. стр. 194). Вторая книга сочинения завершается краткими замечаниями о возможности распространения метода на пространственные кривые посредством проектирования их точек на две взаимно перпендикулярные плоскости и заявлением: «Я полагаю теперь, что ничего не пропустил из начал, необходимых для познания кривых линий»¹.

Конечно, в этих словах Декарта, как и в приведенной выше авторской оценке «Введения» Ферма, было несомненное преувеличение. Но действительно, перед геометрией раскрывались невиданно широкие перспективы. Историки науки немало спорили о том, имелась ли у Аполлония аналитическая геометрия и было ли творчество Ферма и Декарта в этой области новаторским. Ответ зависит от определения термина «аналитическая геометрия», который, как отмечалось в другой связи, понимается по-разному. Несомненно, что оба ученых чрезвычайно многим обязаны были древним и что в саму теорию конических сечений они не внесли каких-либо новых теорем, а также не построили ее в чисто аналитическом плане. И вместе с тем Декарт и Ферма закладывали фундамент поистине новой геометрии, хотя «симптомы» Аполлония и соответствовали буквенным уравнениям кривых второго порядка.

Дело в том, что, как правильно писал Г. Цейтен, «геометрическая форма, приданная методом древних самой алгебре, была причиной многочисленных комбинаций между средствами и объектом геометрического исследования — комбинаций, которые должны были оставаться довольно чуждыми аналитической геометрии, в особенности поскольку последняя стремилась превратить геометрические проблемы целиком в задачи исчисления»². И до тех пор, пока средством исследования оставалась геометрическая алгебра, синтетическое рассмотрение неизбежно переплеталось с аналитическим, а в глазах некоторых ученых являлось принципиально господствующим. Ньютон, завершая свой вывод теоремы о том, что место к четырем прямым есть коническое сечение, писал: «Такое решение, как приведенное выше, т. е. исполняемое не с помощью исчисления, но геометрическим построением, и изыскивалось древними»³. Между тем после Ферма и Декарта и благодаря им начинает развиваться чисто аналитический метод исследования геометрических образов, в принципе не нуждающийся в обращении к геометрическим построениям и опирающийся лишь на алгебраическое исчисление. Такова общая, идейная сторона дела. К этому следует добавить, что новая алгебра давала средства изучения кривых

¹ Р. Декарт. Геометрия, стр. 73.

² Г. Цейтен. История математики в древности и в средние века. Перевод П. С. Юшкевича. М.—Л., 1938, стр. 138.

³ И. Ньютон. Математическое начала натуральной философии. Перевод А. Н. Крылова. Собрание трудов А. Н. Крылова, т. VII. М.—Л., стр. 122.

любого порядка, первые примеры чего имеются уже у Декарта ¹ (такое применение геометрической алгебры было невозможно), что система координат становилась свободной от связи с теми или иными исключительными точками и направлениями (например, диаметром и вершиной конического сечения), что приобретали право на существование отрицательные координаты и т. д. Мы не говорим уже о том, что в новой геометрии впервые нашло явное выражение понятие о функции, заданной формулой.

В свете сказанного второстепенное значение имеют недостатки, присущие аналитической геометрии Декарта и Ферма, пользовавшегося к тому же менее совершенной алгеброй Виета, например неразработанность вопроса об отрицательных координатах или отсутствие на большинстве чертежей второй оси, а также то обстоятельство, что оба они ограничились немногими примерами приложения нового метода.

Современники восприняли новую геометрию с энтузиазмом. Уже в латинских изданиях «Геометрии» Декарта мы находим отдельные, заслуживающие упоминания вещи.

Первые последователи Декарта в геометрии

Как говорилось, «Введение» Ферма более сорока лет оставалось в рукописном виде и почти исключительная заслуга в распространении охарактеризованного нами метода выпала на долю «Геометрии» Декарта, за которым последовали Дебон, Схоотен, де Витт, Валлис и многие, многие другие. Первым откликнулся на выход «Геометрии» Дебон, уже в 1639 г. приславший Декарту свои замечания, при полном одобрении Декарта помещенные в издании 1649 г. Отметим среди них предложение, что линейное уравнение выражает прямую линию (с учетом прямых $x = c$ и $y = c$), и подробный анализ уравнения гиперболы $xy + bx + cy - d = 0$, отсутствовавший у Декарта (но данный во «Введении» Ферма). Любопытно для математики того времени, что Дебон различал еще семнадцать видов указанного уравнения в зависимости от знаков коэффициентов и равенства тех или иных нулю. Иногда основной переменной у него служит x . И Схоотен дополнил кое в чем изложение Декарта: так, комментируя утверждение Декарта об инвариантности рода кривой, он привел формулы, выражающие новые координаты через старые при переносе начала и одновременном повороте обеих осей на некоторый угол. Если на рис. 10 $AB = x$, $BC = y$ и новой осью абсцисс служит DG , а новым началом D , причем $DA = a$ и перпендикулярный к DA отрезок $AF = b$, то новые, также ортогональные координаты DG , GC выражаются через старые формулами

$$DG = \frac{a^2 + ax - by}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad CG = \frac{ab + bx + ay}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Вот, писал Схоотен, «вся разница, получающаяся от того, что точки C кривой один раз относят к точкам прямой AB , а другой раз — к точкам прямой DF »²: аналогично обстоит дело, если взять какие-либо другие оси

¹ Помимо трезубца Декарт рассмотрел (в переписке 1638 г.) так называемый декартов лист $x^3 + y^3 = 3axy$ и еще некоторые выпуклые кривые.

² R. Descartes. Geometria. Lugduni Batavorum, 1649, p. 193.

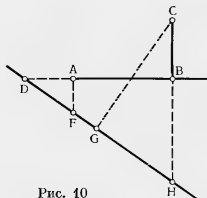


Рис. 10

координат. По-видимому, именно линейный характер этих формул (обеспечивающий линейность и выражения старых координат через новые) служил в глазах Схоотена основанием предложения об инвариантности рода кривой, хотя он это и не высказал со всей ясностью, как это сделал много спустя Л. Эйлер во втором томе «Введения в анализ бесконечных» (1748)¹. Добавим, что общими формулами преобразования координат Схоотен не пользуется и в каждом отдельном случае проводит все вычисления полностью. Так, например, он преобразует выведенное Декартом (см. стр. 105) уравнение гиперболы

$$yy = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac$$

сначала к виду

$$yy = \frac{c}{b}xy - ac,$$

а затем относит его к сопряженным диаметрам

$$yy = \frac{c^2}{4b^2}xx - ac.$$

Вообще, Схоотен подробно разъяснил многие теоремы и формулы, оставленные Декартом без вывода; например, чтобы построить нормаль к конхоиде, Схоотен выводит ее уравнение, которого нет у Декарта, и к полному решению задачи по методу своего учителя добавляет еще решение по способу Ферма, а также отыскание точек перегиба по Гюйгенсу (см. стр. 195).

Схоотен занимался также проблемой кинематического образования кривых и этому вопросу посвятил специальный «Трактат об органическом описании конических сечений на плоскости» (*De organica conicorum sectionum in plano descriptione tractatus*. Lugduni Batavorum, 1646), который впоследствии был переиздан в качестве четвертой из пяти книг его «Математических этюдов» (*Exercitationum mathematicarum libri quinque*. Lugduni Batavorum, 1657). В этом трактате приведен целый ряд как известных ранее, так и оригинальных кинематических построенных эллипса, гиперболы и параболы. В частности, указано, что при движении концов данного отрезка по сторонам данного угла любая жестко связанная с отрез-

¹ Эйлер же впервые записал общие формулы преобразования координат, пользуясь тригонометрическими функциями угла поворота.

ком точка описывает дугу некоторого эллипса (для случая, когда точка лежит на отрезке, это знал еще Прокл в V в. нашей эры). Гораздо более общие приемы органического описания кривых вскоре предложил Ньютон (см. стр. 116—117).

Во втором латинском издании «Геометрии» помещены «Начала кривых линий» (*Elementa curvarum linearum*) другого ученика Схоотена Яна де Витта (1625—1672), республиканца, некоторое время состоявшего великим пенсионарием (государственным главой) Нидерландов. Целью де Витта было развитие подробного учения о конических сечениях, не прибегая к их пространственному определению, как сечений конуса. Для этого он положил в основу кинематическое образование параболы, гиперболы и эллипса, а затем геометрически показал, что возникающие таким путем кривые удовлетворяют симптомам Аполлония и, значит, суть сечения конуса. Труд де Витта содержит отдельные ценные результаты, но собственно аналитическое исследование в нем играет второстепенную роль ¹.

Более высоко ценил и в большей мере использовал алгебраический метод Валлис в «Трактате о конических сечениях, изложенных по новому способу» (*Tractatus de sectionibus conicis nova methodo expositis*, Oxoniae, 1655). Валлис определяет параболу, эллипс и гиперболу не стереометрически, а как кривые на плоскости в соответствии, как он говорил, с их абсолютной природой. В этих определениях формулируются зависимости между ординатами и отрезками диаметра, которые при соответствующем выборе системы координат выражаются уравнениями всех трех кривых, отнесенными к вершине. Здесь применяется та же система косоугольных координат, что у Аполлония, причем абсцисса обозначается d (*diameter intercepta* — «отсеченный диаметр»), соответствующие ординаты, параллельные направлению, сопряженному с выбранным диаметром, обозначаются p для параболы, e для эллипса и h для гиперболы, длина рассматриваемого диаметра обозначается t — «поперечная сторона» (*latus transversum*), а хорда, проведенная через фокус в направлении ординат, обозначается l — «прямая сторона» (*latus rectum*) ². В этих обозначениях уравнения параболы, эллипса и гиперболы получают вид

$$p^2 = ld, \quad e^2 = ld - \frac{l}{t}d^2, \quad h^2 = ld + \frac{l}{t}d^2.$$

Показав, что определенные таким образом кривые совпадают с коническими сечениями, Валлис стремится затем вывести их свойства из уравнений чисто алгебраически. Он подчеркивает преимущества такого вывода, как более общего и ясного и вместе с тем столь же научного. Однако в широком объеме это удалось сделать лишь в середине XVIII в. Сам он ограничился некоторыми основными теоремами, и его доказательства нередко состояли в передаче средствами алгебры рассуждений синтетического характера.

Помимо кривых второго порядка, в «Трактате о конических сечениях» рассмотрена кубическая парабола $p^3 = l^2d$, но изучается только часть этой кривой при положительных d и p ; вторая половина этой линии здесь

¹ Отметим все же первый чисто аналитический вывод уравнений эллипса и гиперболы, как геометрических мест точек, сумма или разность расстояний которых до двух данных точек постоянна.

² Эту хорду Валлис вслед за Клодом Мидоржем называл параметром. Теперь так именуют полухорду $l/2$.

ошибочно изображена в виде правой половины линии $p^2 = l^2 d$, так что вся линия имеет вид обычной параболы. Однако уже в 1656 г. в предисловии к «Трактату, опровергающему диалог... М. Мейбома» (*Adversus M. Meibomii... dialogum tractatus elencticus*) Валлис нашел форму этой кривой правильно. Он здесь же обобщил свое наблюдение на произвольные параболы n -го порядка $p^n = l^{n-1} d$. Тем самым впервые были сознательно и явно применены отрицательные абсциссы, а не только ординаты.

Пространственные координаты

Во второй половине XVII и начале XVIII в. появилось еще несколько сочинений, содержавших аналитическую трактовку конических сечений, из которых мы отметим «Новые начала конических сечений» (*Nouveaux éléments de sections coniques*, Paris, 1679) члена Парижской академии наук и профессора Французского коллежа Филиппа де Лагира (1640—1718).

Художник по своей первой профессии, Лагир применял в теоретических сечениях и проективно-геометрические соображения, а на его терминологии отразилось несомненное влияние Декарта (см. стр. 123—124). Так, начальная точка обозначалась *O* (*origine* — «начало»), ось абсцисс называлась «стволом» (*tige*), точки на этой оси обозначались *N* (*neuds* — «узлы»), точки геометрического места — *L* (*lieu* — «место»), абсциссы *ON* назывались «частями ствола», а ординаты *NL* — «ветвями» (*rameaux*). Эта терминология наглядно показывает расположение абсцисс и ординат на заре развития аналитической геометрии; из обозначений Лагира привилось только обозначение *O*.

В «Новых началах» Лагира впервые получили, хотя и мимоходом, аналитико-геометрическое применение «декартовы» координаты точки в пространстве. Сама идея определять положение точки в пространстве с помощью ортогональных прямолинейных координат была печатно высказана еще в 1636 г. Дезаргом, но в другой связи (стр. 121). Обозначая эти координаты x, y, v , Лагир вывел уравнение пространственного места, заданного некоторым свойством его точек,

$$a^2 + 2ax = y^2 + v^2.$$

Для него было ясно, что вообще уравнение с тремя переменными соответствует поверхности, однако он не отметил, а может быть, и не заметил, что его место есть параболоид, получающийся при вращении параболы $y^2 = 2ax + a^2$ вокруг оси абсцисс.

Хотя пространственными координатами в конце XVII в. несомненно пользовались и другие математики (например, Иоганн Бернулли), но, кроме Лагира, в то время никто ничего по этому вопросу не опубликовал, да и он ограничился одним примером без его анализа. Вторично уравнения поверхностей — шаровой и еще нескольких — появляются у коллеги Лагира по Парижской академии Антуана Парана (1666—1716) в его «Математических и физических опытах и исследованиях» (*Essais et recherches de mathématique et physique*, Paris, 1705). Только А. Клеро приступил к более широкой разработке аналитической геометрии в пространстве.

«Перечисление кривых третьего порядка» Ньютона

Несмотря на указанные успехи, конкретные новые результаты, полученные в геометрии с помощью нового метода, были на первых порах немногочисленны, а главное, имели разрозненный характер. Большую роль, чем в самой геометрии, координатный метод и применение уравнений играли в разработке исчисления бесконечно малых. Но уже во второй половине 60-х гг. XVII в. Ньютон присоединил к аналитической геометрии конических сечений новую обширную область кривых 3-го порядка, лишь отдельные примеры которых были известны ранее. Правда, свое «Перечисление кривых третьего порядка» (*Enumeratio lineis tertii ordinis*) Ньютон опубликовал вместе с «Оптикой» много позднее (Лондон, 1704), однако все главные результаты, содержащиеся в «Перечислении», он довольно подробно изложил еще в рукописях 1667 или 1668 гг., а часть их получил даже в конце 1664 г.¹ Тщательно проштудировав незадолго перед тем выпшедшее второе латинское издание «Геометрии» Декарта (1659—1661), а также сочинения Валлиса, Схоотена и нескольких других авторов, Ньютон очень быстро далеко опередил всех современников. Он полностью овладел аналитико-геометрическим методом, научился производить сложные преобразования косоугольных координат и уверенно распространил на высшие кривые все необходимые ему понятия теории конических сечений, дополнив их рядом новых идей и создав соответствующую терминологию, — например термины двойная, тройная и вообще кратная точка (*punctum multiplex*). Характерно одинаковое заглавие двух наиболее важных рукописей: «Перечисление кривых трех измерений». Для этого перечисления Ньютон преобразует общее уравнение кривой 3-го порядка в произвольных косоугольных координатах

$$ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + hy + kx + l = 0$$

к простейшим формам и затем, следуя чисто аналитическими путями, производит систематическую классификацию кубических кривых, причем детально характеризует особенности каждого из 58 установленных им тогда видов, дает их тщательно выполненные чертежи и каждому из них присваивает свое наименование. Впоследствии Ньютон несколько уточнил классификацию, добавив еще 14 видов, усложнявших ранее от его внимания; кроме того, он изменил первоначальную терминологию. В 1667 или 1668 гг. Ньютон подробно разработал и свой общий метод органического описания алгебраических кривых. Значительная часть этих открытий вошла в «Перечисление кривых третьего порядка», а несколько предложений Ньютон включил в «Математические начала» (1687) и во «Всеобщую арифметику» (1707). Впрочем, одну весьма важную теорему, сформулированную в другой рукописи, относящейся примерно к 1667 г.: число точек пересечения двух алгебраических кривых равно произведению их «измерений» Ньютон нигде не опубликовал. Впервые это сделал, по-видимому, Маклорен в 1720 г. (см. т. III, гл. 5).

Ньютон в равной мере свободно владел как синтетическими, в том числе проективными, методами, так и алгебраическим. В «Математических

¹ The Mathematical Papers of Isaac Newton, vol. I—II, ed. by D. T. Whiteside with the assistance in publication of M. A. Hoskin. Cambridge, 1967—1968 (vol. I, p. 155—212; vol. II, p. 1—459).

началах» (1687) необходимые предложения о конических сечениях он доказывал преимущественно в манере древних. Аналитическая теория конических сечений вообще не привлекла интереса Ньютона, хотя во «Всеобщей арифметике» есть несколько блестящих примеров алгебраического решения ее задач, в том числе задач, в «Математических началах», решенных синтетически. В сочинении о линиях третьего порядка сочетаются оба подхода. Здесь для нас существен прежде всего аналитико-геометрический аспект этого труда. Заметим предварительно, что координатная система у Ньютона уже ни в чем не отличалась от нашей косоугольной, вычерчивались обе оси и обращение с отрицательными абсциссами было безукоризненным.

Ньютон начинает с того, что совершенствует декартову классификацию алгебраических кривых, которые называет, подобно Декарту, «геометрическими». Он распределяет их по порядкам соответственно степени уравнений или, как он указывает, числу возможных точек их пересечения с прямой. «Негеометрические» кривые Ньютон называет линиями бесконечного порядка. Вопрос об инвариантности порядка кривой при замене координат не затрагивается, как не разбирается подробнее вопрос о числе ее точек пересечения с прямой линией.

После этого Ньютон обобщает на кривые третьего порядка понятия диаметра, оси, вершины, центра, общего центра, параметра. Например, диаметр определяется, как геометрическое место точек, для которых сумма двух отрезков хорд, параллельных какому-нибудь направлению, взятых с одной стороны, равна третьему отрезку тех же хорд, взятому с другой стороны. Центр есть точка пересечения каких-либо двух диаметров, общий центр — точка пересечения всех диаметров. Затем для характеристики поведения кривых вводятся понятия гиперболической ветви, имеющей прямую асимптоту, с которой совпадает касательная при удалении точки касания в бесконечность, и параболической ветви, касательная к которой удалается в бесконечность вместе с точкой касания. Число асимптот не превосходит порядка кривой. Вводятся также особые точки кривых — узловые, точки заострения, изолированные (термин «особая точка» (*point singulier*) употребил в работе 1740 г. французский геометр Ж. П. де Гюа де Мальв, см. т. III, гл. 5). Ньютон рассматривает и бесконечно удаленные точки, хотя несколько иначе, чем мы.

Все это используется для детального описания кривых третьего порядка, которые, согласно Ньютону, могут быть приведены к четырем основным типам, в свою очередь подразделяющимся на 72 вида. Для каждого вида указаны характер ветвей, асимптоты, особые точки и дан отдельный рисунок. Эти четыре типа имеют уравнения

$$xy^2 + cy = P, \quad xy = P, \quad y^2 = P \text{ и } y = P,$$

где

$$P = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

и вид кривой оказывается зависящим от характера корней уравнения $P = 0$, а в случае первого типа и корней уравнения

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{e^2}{4} = 0.$$

Перечислением и анализом свойств линий третьего порядка Ньютон не только чрезвычайно обогатил теорию алгебраических кривых, но и показал

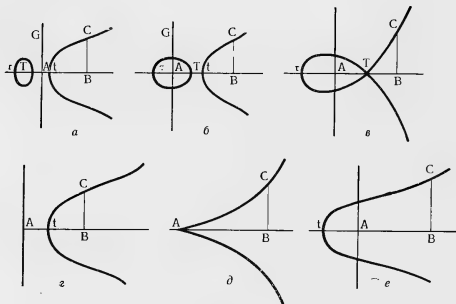


Рис. 11

огромное значение координатного метода в самой геометрии. В этом же сочинении он развивает и важные проективные идеи, ничего не зная, вероятно, о более ранних исследованиях Дезарга и Паскаля. Именно, он утверждает, что все виды линий третьего порядка суть центральные проекции — «тени от светящейся точки» — шести расходящихся парабол, т. е. кривых третьего типа, имеющих уравнения $y^2 = P$ (рис. 11, а, б соответствуют трем действительным неравным корням At , AT , At уравнения $P = 0$; в, г — случаю двух равных корней; д — тройному корню, е — случаю двух мнимых корней). «Если, — писал Ньютон, — на бесконечную плоскость отбрасывать от светящейся точки тени фигур, то теньми конических сечений всегда будут конические сечения; тени кривых второго рода будут всегда кривыми второго рода, тени кривых третьего рода будут всегда кривыми третьего рода и так далее до бесконечности. И совершенно так же, как круг при отбрасывании тени производит все конические сечения, точно так пять расходящихся парабол производят и доставляют все другие кривые второго рода»¹.

Сказанным Ньютон не ограничивается. Развивая кинематические приемы Декарта и Схоотена, он учит еще «органическому описанию» кривых. Если точка пересечения одной пары сторон двух заданных углов, вращающихся вокруг своих вершин, движется по прямой, то точка пересечения другой пары описывает коническое сечение (в частном случае — прямую). Эту теорему, в которой кривая второго порядка рассматривается по существу как место точек пересечения соответствующих лучей двух проективных пучков (их теорию построил Я. Штейнер, 1832), Ньютон доказал в «Математических началах» синтетически и во «Всеобщей ариф-

¹ И. Ньютон. Математические работы. Перевод, статьи и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского. М. — Л., 1937, стр. 206. Родом кривой Ньютон называл ее порядок, уменьшенный на единицу.

метике» аналитико-геометрически¹. «Органическое описание» служило Ньютону одним из средств решения актуальной задачи проведения конического сечения по пяти условиям, включающим прохождение через данные точки и касания с данными прямыми. Этот вопрос интересовал еще Паскаля и легко решается при помощи его теоремы о вписанном в коническое сечение шестиугольнике (см. стр. 124). Ньютон пришел к той же задаче, исследуя вопрос об определении параболической орбиты кометы по трем наблюдениям; впрочем, последний вопрос решен в «Математических началах» другим, более простым способом.

В «Перечислении» Ньютон распространяет прием органического (проективного) описания линий на уникурсальные кривые высших порядков. В частности, если точка пересечения одной пары сторон двух вращающихся углов движется по коническому сечению, то точка пересечения другой пары описывает кривую третьего или четвертого порядка с двойными точками. Тут же рассмотрена задача проведения конического сечения через пять точек и кривой третьего порядка по семи данным ее точкам, из которых одна двойная. В заключение даны некоторые указания о применении кривых третьего порядка к построению корней уравнений. Любопытно, что, подобно Декарту, Ньютон считал, что в «геометрии кривые употребляются для решения задач при помощи их точек пересечения»². Этому же мнению придерживался также Лейбниц.

Ньютон не привел доказательств подавляющего большинства своих предложений. Это было сделано многими геометрами XVIII в. и потребовало дальнейшего развития аналитических и проективных методов.

Идея бесконечно удаленной точки у Кеплера

Пам уже несколько раз пришлось касаться истории проективной геометрии, первые теоремы которой имелись еще у древних (см. т. I, стр. 137 и 151). В XVII в. проективные методы получают у нескольких ученых замечательное развитие. Этому содействовали различные обстоятельства — прежде всего задачи теории перспективы, о которой мы скажем несколько далее, а также геометрические вопросы астрономии, о которых частично уже говорилось, да и внутриматематические потребности.

Возвращаясь от Ньютона к рубежу XVI и XVII вв., мы находим несколько важных идей, в частности применение бесконечно удаленной точки у Кеплера. Так как при проектировании параллельные прямые могут перейти в пересекающиеся (с этим явлением мы постоянно сталкиваемся, когда смотрим на две параллельные линии на горизонтальной плоскости: в нашем глазу эти линии проектируются в прямые, которые кажутся пересекающимися на линии горизонта), то для того, чтобы точке пересечения двух прямых, полученных проектированием двух параллелей, всегда отвечала некоторая точка, следовало ввести понятие о бесконечно удаленных точках, которые можно было бы считать точками пересечения параллельных прямых. Бесконечно удаленную точку можно представить

¹ В приведенном выше кинематическом описании гиперболы у Декарта (см. стр. 105) она также образуется как геометрическое место точек пересечения соответствующих лучей пучка прямых с центром в C и пучка прямых, параллельных направлению KC .

² *И. Ньютон. Математические работы*, стр. 208.

себе как предельное положение точки, удаляющейся по прямой в бесконечность, причем следует считать одной и той же бесконечно удаленной точкой предельные положения точки, удаляющейся в бесконечность с обеих сторон. Бесконечно удаленную точку можно представить себе как предельное положение двух прямых при стремлении этих прямых стать параллельными; поэтому бесконечно удаленные точки всяких двух параллельных прямых совпадают и их можно рассматривать как точки пересечения этих прямых.

Понятие бесконечно удаленной точки появилось тогда, когда математики стали систематически иметь дело с предельными переходами. Впервые оно было сформулировано одним из основоположников интеграционных методов Нового времени великим астрономом Иоганном Кеплером (1571—1630). Кеплер, уроженец г. Вейля в Бюртемберге, был воспитанником Тюбингенского университета, где под влиянием профессора Михаэля Местлина (1550—1631) полюбил математику и астрономию и стал приверженцем коперниканской системы мира. Впрочем, Местлин мог познакомить своего ученика с гелиоцентрической доктриной лишь частным образом: в лекциях он, по требованию университетских руководителей, излагал систему Птолемея. Жизнь Кеплера была трудной. С 1594 г. он работал профессором «математики и морали» в Граце, где должен был заниматься и предсказанием не только погоды, но и политических событий как астролог. Горькая ирония звучит в словах Кеплера, говорившего, что матери астрономии пришлось бы голодать, если бы ей не зарабатывала на хлеб ее дочь астрология. Но Грац пришлось покинуть, так как здесь начались гонения на протестантов, к числу которых принадлежал Кеплер. В 1600 г. он переехал в Прагу по приглашению выдающегося датского астронома Тихо Браге (1546—1601), состоявшего тогда придворным астрономом и астрологом германского императора Рудольфа II (1552—1612). После смерти Браге Кеплер занял его должность. Годы жизни в Праге были весьма продуктивными для Кеплера, хотя жил он постоянно в большой нужде: жалование ему платили весьма неаккуратно и неполностью. В Праге вышел его труд по оптике, о котором говорится несколько далее, и здесь же, используя значительные по своей точности наблюдения Браге над движением планеты Марс, он установил первые два закона обращения планет, которые носят его имя: 1) планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце, и 2) время движения планеты на дуге ее орбиты относится по времени ее полного оборота как площадь, описанная радиус-вектором, проведенным из фокуса в точки дуги, к площади всего эллипса. Эти замечательные открытия были опубликованы в «Новой астрономии» (*Astronomia nova*, Praga, 1609)¹. В 1612 г. после смерти императора Кеплер переехал в Линц и здесь преподавал математику, а также наблюдал за измерительными работами. В Линце он опубликовал свой главный труд по математике — «Новое измерение винных бочек» (1615), о котором говорится далее, а также увенчал свои астрономические исследования открытием третьего закона: 3) квадраты периодов обращения планет относятся, как кубы их средних расстояний от Солнца («Гармония мира» — «*Harmonices mundi*», 1619). Но в этот же период жизни ему довелось перенести тяжелую драму — судебный процесс против его матери,

¹ В этой книге оба закона установлены для Марса; в «Кратком изложении коперниканской астрономии» (*Epitome astronomiae Copernicanae*, Lincii — Francoforti, 1618—1621) Кеплер распространил их на все планеты и спутники.



Иоганн Кеплер
(с современного портрета Я. ван дер Гейдена)

которую обвинили в колдовстве и которую он мужественно защищал и в конце концов с немалым риском для самого себя спас от угрожавшего ей сожжения на костре. Но и Линц оказался небезопасным из-за усилившихся преследований протестантов, и Кеплер его покинул в 1626 г. Последние годы он провел в скитаниях, тщетно добиваясь того, чтобы с ним расплатились его различные высокопоставленные должники, в том числе известный полководец Валленштейн (1583—1634).

Для истории геометрии большой интерес представляет «Оптическая часть астрономии» (*Astronomiae pars optica*, Francoforti, 1604). Под-

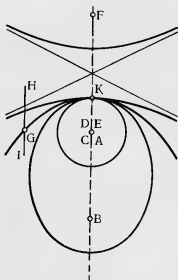


Рис. 12

заголовок последнего сочинения («Дополнения к Вителло» — «*Paralipomena ad Vitellionem*») и большое число ссылок на «Оптику» Ибн ал-Хайсама (Альхазена) указывают на преемственные связи с этими учеными. Здесь в разделе «О конических сечениях» Кеплер указывает, что сечение конуса плоскостью может быть прямой, кругом, параболой, гиперболой и эллипсом, причем «прямая линия переходит в параболу через бесконечные гиперболы, а далее через бесконечные эллипсы в круг» (рис. 12) и что «самая тупая из гипербол — прямая линия, а самая острая — парабола, самый острый из эллипсов — парабола, а самый тупой — круг»¹. Далее Кеплер говорит: «У круга имеется один фокус *A*, он же и его центр. У эллипса имеются два фокуса *B*, *C*, равноудаленные от центра фигуры, и чем острее эллипс, тем более удаленные. У параболы имеется только один фокус *D* внутри фигуры, а другой следует представлять себе на оси сечения вне или внутри его удаленным от первого на бесконечное расстояние, так, что линия *HG* и *IG*, проведенная из этого невидимого фокуса в произвольную точку *G* сечения, параллельна оси *DK*. У гиперболы внешний фокус *F* тем ближе к внутреннему фокусу *E*, чем тупее гипербола, причем внешний фокус для одного из двух противоположных сечений является внутренним для другого и наоборот»².

Рассуждение Кеплера замечательно в нескольких отношениях. Здесь впервые в европейской литературе появляется термин «фокус» (*focus* — буквально «огонь, очаг») под несомненным влиянием Вителло, называвшего фокус параболического зеркала точкой, где «можно зажечь огонь» (*ignem est possibile accendi*)³. Впоследствии этот термин Кеплер употреблял в «Новой астрономии». Здесь, далее, появляется выражение «бесконечно удаленный» — у Кеплера «удаленный на бесконечное расстояние» (*infinito intervallo remotus*) для второго фокуса параболы, причем этот

¹ *I. Kepler. Gesammelte Werke*, Bd. II. München, 1939, S. 90.

² Там же, стр. 91—92.

³ *Vitellonis Thuringopoloni Opticae libri decem*. Basileae, 1572, p. 401.

фокус называется невидимым (caecus). Кеплеру ясно, что «невидимый фокус» замыкает ось DK в обоих направлениях и что через него проходят все прямые HGI , параллельные оси. Кеплер рассматривает непрерывный переход конических сечений друг в друга, при котором эллипс может перейти в параболу, а парабола — в гиперболу, причем после перехода второго фокуса через бесконечно удаленную точку он появляется с другой стороны вместе со второй ветвью гиперболы, которую Кеплер называет античным термином «противоположное сечение». Выражения Кеплера «самая тупая из гипербол — прямая линия, а самая острая — парабола», и «самый острый из эллипсов — парабола», показывают, что он считает прямую предельным случаем гиперболы, а параболу — предельным случаем и гиперболы, и эллипса. Представление о параболе как о гиперболе или эллипсе с бесконечно удаленным фокусом — первое применение так называемого принципа непрерывности.

Возникновение проективной геометрии

Как было сказано, проективная геометрия выросла главным образом из теории перспективы, которая в XVI в. была в центре внимания художников и архитекторов. И в начале XVII в. появилось несколько книг по этому предмету Гвидубальдо дель Монте (1545—1607), Стевина, Франсуа д'Эгильона (1566—1617) и других. Заметим, что в «Шести книгах по оптике» (*Opticorum libri VI, Antverpiae, 1613*) д'Эгильона наряду с другими проекциями рассмотрена и стереографическая, описанная еще Птолемеем, и вводится этот термин.

Все названные авторы были далеко превзойдены французским инженером, архитектором и геометром Жераром Дезаргом (1594—1661), который положил начало проективной геометрии как отдельной науке. О его жизни известно очень немного. Мы знаем все же, что он был тесно связан с парижскими учеными, группировавшимися около Мерсенна, и не раз участвовал в их собраниях.

Дезарг не преследовал столь широких целей, как Декарт в его всеобщей математике, и идея алгебраизации геометрии осталась для него далекой. Его задача была более специальной: дать глубокое теоретическое обобщение графических приемов, употребляемых в архитектуре, живописи, резке камней и т. д., и вместе с тем учение о перспективе, оставшееся в значительной мере собранием полуэмпирических правил, поднять до уровня настоящей геометрической науки. Решая эту задачу, Дезарг и пришел к выделению общего проективного преобразования, как особого метода изучения свойств и взаимозависимостей фигур. В своем первом небольшом сочинении, объемом всего в 12 страниц, «Образец одного из общих способов... для употребления перспективы...» (*Exemple de l'une des manières universelles ... touchant la pratique de la perspective...*, Paris, 1636) Дезарг, определяя положение предмета расстояниями его точек от картинной и предметной плоскости и положением их проекций на линии пересечения этих плоскостей, показал, как построить перспективный масштаб для каждого из определяющих отрезков и с его помощью получить перспективное изображение предмета. По существу здесь было впервые предложено упоминавшееся уже координатное определение точек в пространстве, причем каждый отрезок предполагается выраженным числом.

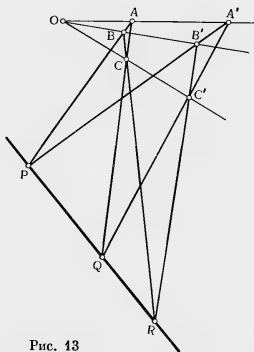


Рис. 13

Невелик по объему (30 страниц) и основной труд Дезарга «Черновой набросок подхода к явлениям, происходящим при встрече конуса с плоскостью» (*Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan*, Paris, 1639). Здесь уже широко применяется проективное преобразование, бесконечно удаленные точка и прямая (как точка или прямая пересечения пучков параллельных прямых или соответственно плоскостей), а также двойное отношение четырех точек, в частных случаях встречавшееся у Паппа. Дополняя плоскость бесконечно удаленной прямой, Дезарг трактует гиперболы и параболы как замкнутые линии, соответственно пересекающие эту прямую в двух точках или касающиеся ее; асимптоты гиперболы при этом представляют собой касательные к ней в ее бесконечно удаленных точках. Он рассматривает преобразования прямой, сохраняющие двойное отношение четверок точек, в частности инволюцию, и аналогичные преобразования плоскости, при которых параллельные прямые могут перейти в пересекающиеся, а эллипс — в гиперболу или параболу. Такие преобразования в настоящее время называются проективными преобразованиями прямой и плоскости. Инволюцию Дезарг определил как такое соответствие между точками B и H , C и G , D и F , ... прямой, на которой отмечена точка A , что прямоугольники, построенные на соответственных парах отрезков AB и AH , AC и AG , AD и AF , ..., имеют постоянную площадь. Если мы введем на прямой координаты и обозначим координаты точек, соответствующих друг другу в инволюции, через x и x' , то мы можем записать инволюцию в виде $x' = a^2/x$ и $x' = -a^2/x$. В первом случае инволюция обладает двумя неподвижными точками ($x = \pm a$) и называется гиперболической, во втором случае инволюция не имеет неподвижных точек (условию $x' = x$ удовлетворяют мнимые числа $x = \pm ia$) и называется эллиптической. Инволюция является простейшим проективным преобразованием на прямой и определяется

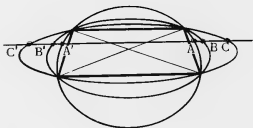


Рис. 14

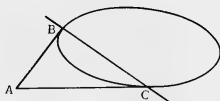


Рис. 15

как такое проективное преобразование на прямой, которое совпадает с обратным ему преобразованием (в настоящее время всякие преобразования, совпадающие с обратными им, называют инволютивными, и термин Дезарга, таким образом, получил распространение далеко за пределами проективной геометрии). Названия инволюций «эллиптическая» и «гиперболическая» объясняются тем, что первая из этих инволюций определяется на бесконечно удаленной прямой сопряженными диаметрами эллипса, а вторая — сопряженными диаметрами гиперболы, тогда неподвижными точками инволюции являются бесконечно удаленные точки асимптот гиперболы. Дезарг доказал, что неподвижные точки гиперболической инволюции гармонически разделяют каждую пару ее соответственных точек; он доказал также ряд теорем о гармонических четверках точек.

Имя Дезарга носят две доказанные им теоремы проективной геометрии. Согласно первой, содержащейся в сочинении 1636 г., если у двух треугольников ABC и $A'B'C'$ прямые, соединяющие соответственные вершины, пересекаются в одной точке, то точки пересечения их соответственных сторон лежат на одной прямой (рис. 13). Согласно второй теореме, приведенной в «Черновом наброске», три пары прямых, которые можно провести через четыре точки (эти прямые можно рассматривать как стороны и диагонали четырехугольника; такую фигуру называют полным четырехсторонником), и всякое проходящее через эти четыре точки коническое сечение пересекается с любой прямой в парах точек, образующих инволюцию (рис. 14).

Дезарг доказал также ряд теорем о полюсах и полярах конических сечений. Если на каждой прямой, проходящей через некоторую данную точку плоскости, мы построим четвертую гармоническую точку для данной точки и двух точек пересечения этой прямой с некоторым коническим сечением, то все полученные таким образом точки лежат на одной прямой, которая называется полярой данной точки относительно данного конического сечения; данная точка в этом случае называется полюсом полученной прямой относительно конического сечения¹. Если на плоскости задано коническое сечение, то на каждой прямой этой плоскости оно определяет инволюцию, которая ставит в соответствие каждой точке этой прямой точку пересечения этой прямой с полярой этой точки. Если прямая пересекается с коническим сечением, эта инволюция — гиперболическая, ее неподвижными точками являются точки пересечения прямой с коническим сечением; если прямая не пересекается с коническим сечением, инволю-

¹ Термины «полюс» и «поляра» (см. о них т. I, стр. 135—136) ввели в 1810 г. и в начале 40-х годов XIX в. французские геометры Ф. Ж. Сервуа (1767—1847) и соответственно Ж. Д. Жергонн (1771—1859).

ция — эллиптическая. Дезарг показал, что если из точки плоскости можно провести к коническому сечению две касательные, то прямая, соединяющая точки касания, является полярой этой точки (рис. 15), что полюс бесконечно удаленной прямой относительно эллипса или гиперболы — центр этого конического сечения и что поляра точки самого конического сечения — касательная к этой кривой в этой точке. Дезарг применил доказанные им теоремы к решению задач на построение, например к нахождению осей симметрии конического сечения, полученного проектированием окружности.

В своих сочинениях Дезарг пользовался особой, придуманной им терминологией, часто заимствованной из ботаники. Многие такие термины применял, как уже говорилось, Лагир, отец которого был дружен с автором «Чернового наброска». Все они были вскоре забыты, за исключением слова «инволюция» (*involution* — буквально «скрученность молодых листьев»).

Проективная геометрия Дезарга была встречена современниками по-разному. Декарт вообще не проявил к ней интереса, что и не удивительно. Ферма дал ей высокую оценку, но сам этой проблематикой не занялся. Некоторых отпугивала уже одна необходимость овладеть новым математическим языком Дезарга. Идеи Дезарга увлекли тогда лишь одного математика, но зато им был Блез Паскаль, которому не исполнилось еще и семнадцати лет. Юный Паскаль немедленно обогатил проективную теорию конических сечений замечательной теоремой, которую, как говорят, Дезарг называл «великим предложением — Паскалью (*la Pascale*)».

Теорема Паскаля

Свое открытие Паскаль опубликовал в виде афиши, изданной в пятидесяти экземплярах для раздачи и пересылки отдельным ученым. Аналогично поступал ранее в нескольких случаях Дезарг. Афиша носила название «Опыт о конических сечениях» (*Essay pour les coniques*, Paris, 1640), рядом с которым стояли инициалы автора. В тексте воздается должное Дезаргу, как одному из великих умов того времени, наиболее искусных в математике. Сама теорема в принятой ныне форме, отличающейся от формулировки в афише (но также известной Паскалю), состоит в том, что точки пересечения произвольных сторон шестиугольника, вписанного в коническое сечение, лежат на одной прямой (рис. 16). Частным случаем является теорема Паппа о шестиугольнике, вписанном в пару прямых (см. т. I, стр. 151).

Но содержание афиши не ограничивалось сказанным. Паскаль подчеркивал, что с помощью его теоремы и еще двух примыкающих к ней можно построить полную теорию конических сечений, включая свойства диаметров и касательных, описание сечений по нескольким данным их точкам и т. д. Известно, что после смерти Паскаля остались рукописи по проективной теории конических сечений. Их видел в 1676 г. Лейбниц, и в одном письме он кратко излагает их богатое содержание. Лейбниц полагал, что рукописи достаточно законченны, чтобы их можно было опубликовать. Однако труд Паскаля не увидел света и до сих пор разыскать его не удалось.

В условиях почти всеобщего увлечения разработкой математического анализа и его приложений, существенно опиравшихся на аналитическую

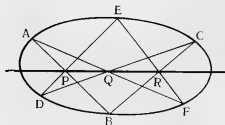
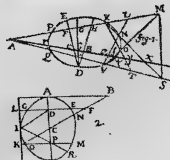


Рис. 16

геометрию, проективно-геометрическое направление Дезарга и Паскаля почти не получило продолжения. «Черновой набросок» первого был вовсе утерян, и лишь в 1845 г. М. Шаль, один из творцов новой проективной геометрии, случайно нашел его конию, сделанную в 1679 г. Лагиром. Печатный экземпляр этого сочинения был обнаружен еще сто лет спустя.

Если не считать нескольких учеников Дезарга в среде мастеров и художников, пытавшихся распространить более всего его учение о перспективе, то после Паскаля единственным его последователем был в XVII в. Лагир. Но этому геометру, имя которого встретилось нам уже в истории аналитической геометрии, не доставало, в отличие от Паскаля, глубины

Верхняя часть афиши с «Опытном о конических сечениях» Б. Паскаля (Париж, 1640)



ESSAI POUR LES CONIQUES

Par B. P.

DEFINITION PREMIERE.



Van plusieurs lignes qui se rencontrent à un même point, ou font toutes parallèles entr'elles, toutes ces lignes font dîtes de même ordre ou de même ordonnance; & la grandeur de ces lignes, est d'un ordre de lignes, ou ordonnance de lignes.

DEFINITION II.

Par le mot de section de Coniques entendons la circonferance du Cercle, l'Elipse, l'Hyperbole, la Parabole & l'angle rebattu. d'autant qu'un Cone coupe par différens plans la base, ou par son sommet ou des points autres lems qui engendrent l'Elipse, l'Hyperbole & la parabole engendrez dans la superficie Conique, ou la circonferance d'un Cercle ou un Angle, ou l'Elipse, ou l'Hyperbole, ou la parabole.

DEFINITION III.

Par le mot de droite nous feul, nous entendons ligne droite.

LEMME I.

Figure 1. Si dans le plan, M, S, Q, du point M, partent les deux droites MK, MV, & du point S, partent les deux droites SK, SV, & que K, soit le concours des droites MK, SK, & V, le concours des droites MV, SV, & R, le concours des droites MA, SA, & P, le concours des droites MV, SK, & que par deux des quatre points, A, K, P, V, qui ne soient pointes le même droite avec les points, M, S, comme par les points, R, V, passe la circonferance d'un cercle; coupant les droites MV, & P, SV, SK, & par les points, O, P, Q, N, & que les droites, M S, N O, P Q, soient de même ordre.

LEMME II.

проникновения в идеи Декарта, которые он воспринял неполностью. Это относится, например, к идее введения бесконечно удаленных элементов и учению об инволюции. Все же одно из сочинений Лагира — «Копические сечения в девяти книгах» (*Sectiones conicae in novem libros distributae*, Parisii, 1685) — заслуживает быть отмеченным. Здесь свойства круга проектированием переносятся на конические сечения, причем используется теория поляра круга. Лагиру принадлежат и некоторые заслуги в разработке учения о перспективе.

В течение долгого времени проективная геометрия нового развития не получала. Оно началось лишь в первые десятилетия XIX в., и подготовкой ему послужили успехи начертательной геометрии в конце XVIII столетия.

Принцип непрерывности Лейбница и идея «геометрии положения»

Принцип непрерывности, в первичной форме встречающийся нам у Кеплера, был значительно обобщен Лейбницем в работе «Некий общий принцип, полезный не только в математике, но и в физике...» (*Principium quoddam generale non in mathematicis tantum sed et in physicis utile...*). В этом труде, при жизни Лейбница остававшемся в рукописи, он писал: «Этот принцип всеобщего порядка коренится в бесконечном и весьма полезен в рассуждениях, хотя до сих пор применялся он недостаточно и значение его не было оценено во всей его широте. Он абсолютно необходим в геометрии, но с успехом действует и в физике, ибо высшая мудрость, являющаяся источником вещей, действует в согласии с совершеннейшей геометрией и соблюдает гармонию ни с чем не сравнимой красоты. Поэтому часто пользуясь для проверки этим принципом, как своего рода пробным камнем, с помощью которого можно сразу же и при одном лишь внешнем рассмотрении вскрыть ложность многих дурно связанных мнений. Сформулировать этот принцип можно следующим образом: если среди данных или принятых явлений (*casus*) различие двух явлений может стать меньше всякой данной величины, то оно вместе с тем необходимо станет меньше всякой величины и у *искомых* или последующих, вытекающих из данных. Или же, если выразиться общедоступнее: *если явления (или данные) непрерывно сближаются так, что напоследок одно переходит в другое, то это же должно произойти и с соответствующими последующими или результатами (или искомыми)*. Это зависит от следующего более общего принципа: *если упорядочены данные, то упорядочены и искомые*¹. Лейбниц приводит несколько примеров применения этого принципа в математике, физике и философии. Один из математических примеров состоит в том, что касательная к кругу при проектировании круга в коническое сечение проектируется в касательную к этой линии; второй пример возвращает нас к идеям Кеплера о бесконечно удаленных точках: теоремы об эллипсе можно применять к параболе, если рассматривать ее как эллипс, один из фокусов которого бесконечно удален. Принцип непрерывности стал мощным орудием доказательства новых теорем в руках творцов проективной геометрии начала XIX в. — Л. Карно и особенно Ж. В. Понселе.

Лейбницу же принадлежит идея «геометрии положения» (*geometria situs*) или «анализа положения» (*analysis situs*) — своеобразного геометри-

¹ Г. В. Лейбниц. Избранные отрывки из математических сочинений, стр. 194—195.

ческого исчисления, в котором роль чисел играют линии и другие геометрические фигуры и где ту роль, которую в обычной геометрии играют величины, выполняет взаимное расположение линий и геометрических фигур. Об этом Лейбниц 8 сентября 1679 г. писал Гюйгенсу: «Я еще не доволен Алгеброй в том отношении, что она в области геометрии не доставляет ни кратчайших путей, ни наиболее красивых построений. Поэтому... я полагаю, что нам нужен еще иной чисто геометрический или линейный анализ, непосредственно выражающий для нас положение (*situm*), как Алгебра выражает величину (*magnitudinem*). Я думаю, что располагаю таким средством и что фигуры и даже машины и движения можно было бы представлять с помощью знаков, как Алгебра представляет числа и величины; и я посылаю вам этюд об этом, который, на мой взгляд, имеет существенное значение»¹. Это письмо, опубликованное в собрании сочинений Лейбница, было хорошо известно математикам XIX в.: на него ссылаются основоположник векторного исчисления Г. Грассман и автор первого сочинения по топологии И. Б. Листинг. Лейбницевский термин «геометрия положения» применялся в 1736 г. Л. Эйлером при решении топологической задачи о семи кенигсбергских мостах (см. т. III, гл. 5), а в XIX в. для обозначения проективной геометрии Л. Карно и Х. Штаудтом; термин «анализ положения» употребляли для топологии Б. Риман и А. Пуанкаре; введенный Листингом общепринятый ныне термин «топология» по существу является переводом латинского термина Лейбница на греческий язык. Однако геометрические исчисления XIX в. значительно отличались и по замыслу и по реализации от наброска самого Лейбница.

Проективное преобразование у Ньютона

При всем интересе Лейбница к проективной геометрии он сам ограничился здесь формулировкой общих идей. Ньютон применял проективные методы к решению конкретных задач. Мы упоминали об этом, рассказывая о его теории кривых третьего порядка. Остановимся еще на одном применении Ньютоном проективного преобразования специального вида. В V разделе I книги «Математических начала натуральной философии», посвященном определению орбит движущихся тел, имеющих вид конических сечений, в случае, когда не задан ни один фокус этих конических сечений, имеется XXII лемма: «Преобразовать фигуру в другую фигуру того же рода» (*Figuras in alias ejusdem generis figuras mutare*)². В этой лемме Ньютон определяет следующее преобразование кривой HGI в кривую hgi (рис. 17): произвольная точка G кривой HGI сначала проектируется параллельно прямой AO в точку D прямой AB , затем точка D проектируется из точки O в точку d прямой BL , из точки d проводится прямая dg под некоторым постоянным углом α к прямой BL и на этой прямой откладывается отрезок dg , определяемый пропорцией $dg : Od = DG : OD$. Если мы отнесем кривую HGI к косоугольным координатам с осями AB , AO , точка G этой кривой определяется абсциссой $X = AD$ и ординатой $Y = DG$. Если мы отнесем кривую hgi к косоугольным координатам с осью абсцисс BL , началом в точке a пересечения оси BL с прямой Oa , параллельной оси AB , и координатным углом α , то точка g этой кривой

¹ Г. В. Лейбниц. Избранные отрывки из математических сочинений, стр. 198—199.

² И. Ньютон. Математические начала натуральной философии, стр. 131.

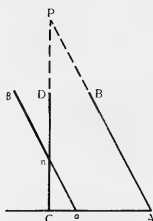


Рис. 18

dis dissertatio geometrica, 1663, опубл. 1693). В этой работе приводится полный перевод доказательства ат-Туси по римскому изданию 1594 г. Валлис исходит из следующей предпосылки: «Наконец, я приму (считая уже известными природу отношения и учение о подобных фигурах) в качестве «общего понятия»: для всякой фигуры возможна другая подобная ей фигура произвольной величины»¹. Валлис обосновывает естественность этого «общего понятия», т. е., иными словами, аксиомы, тем, что его частным случаем является III постулат Евклида: «Из всякого центра и всяким раствором может быть описан круг». Для того чтобы доказать, что две прямые AB и CD (рис. 18), образующие с прямой AC углы, в сумме меньше двух прямых, пересекаются, Валлис передвигает эту прямую AB вдоль прямой AC таким образом, что угол CAB остается постоянным. При достаточном приближении к точке C прямая AB займет такое положение $\alpha\beta$, в котором оно пересечется с прямой CD в точке λ . По предположению Валлиса, для полученного треугольника $\alpha C\lambda$ имеется подобный треугольник ACP ; точка P и является искомой точкой пересечения.

Это сочинение Валлиса получило большую известность, хотя само по себе и не продвинуло сколько-нибудь далее исследование труднейшей проблемы постулата о параллельных, над решением которой математики продолжали трудиться еще в течение всего XVIII и первых десятилетий XIX в.

Наряду с теорией параллельных линий, сыгравшей важную роль в подготовке открытия в XIX в. неевклидовой геометрии, существенную роль в разработке этой геометрии сыграла упомянутая нами теорема о том, что площадь сферического треугольника пропорциональна избытку суммы его углов над двумя прямыми углами, доказанная Жираром (см. стр. 24). В случае, когда сумма углов треугольника меньше двух прямых, площадь треугольника также оказывается пропорциональной разности между двумя прямыми и суммой его углов; и этот факт, так же как его сравнение с теоремой Жирара, будет иметь первостепенное значение в исследованиях математика XVIII в. И. Г. Ламберта и Н. И. Лобачевского.

¹ J. Wallis. Opera mathematica, v. II. Oxoniae, 1693, p. 665.

СЕДЬМАЯ ГЛАВА

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

Возрождение методов Архимеда

Главным событием в истории математики XVII в. была разработка дифференциального и интегрального исчисления. Интеграционные по своему существу задачи на спрямление кривых линий, квадратуру площадей плоских и кривых поверхностей, кубатуру объемов тел, определение центров тяжести встречались еще в древности. Старейшими из них были спрямление окружности и квадратура круга. Демокрит с помощью атомистических процедур дал вывод нескольких предложений о кубатурах. Евдокс создал метод исчерпывания, позволивший строго доказать правильность этих предложений. Метод исчерпывания, эта античная форма метода пределов, получил новое блестящее развитие у Архимеда, который в своих квадратурах и кубатурах уже пользовался верхними и нижними интегральными суммами. Ряд открытий Архимед произвел при помощи механического метода, уравнивая сечения рассматриваемых фигур, переносимых им в другие точки; при этом он представлял себе тела, как составленные из всех их плоских сечений, между собой параллельных, а плоские фигуры, как составленные аналогичным образом из всех их хорд. В этом эвристическом приеме общая атомистическая идея выступала в форме идеи о неделимых элементах низшего измерения, чем данная измеряемая фигура. Архимед решал и задачи дифференциального исчисления, на проведение касательных к кривым линиям и нахождение максимумов и минимумов. Методы Архимеда получили некоторое развитие в странах ислама и в XII—XIII вв. стали известны в средневековой Европе.

Хотя распространение идей Архимеда в Средние века было ограниченным (наибольшую известность имели «Измерение круга» и некоторые предложения из труда «О шаре и цилиндре»), оно поддерживало интерес к «архимедовой традиции», так же как рассуждения и споры о свойствах непрерывного и дискретного поддерживали интерес к общим проблемам математики бесконечного. Все это сыграло свою роль, когда во второй половине XVI и начале XVII в. на первый план в механике и астрономии стали выдвигаться новые, все более сложные задачи, требовавшие инфинитезимальных методов решения.

Эпоха Возрождения явилась и временем возрождения архимедовой традиции.

Выше уже говорилось (стр. 13—15) о появлении в Италии первых печатных изданий Архимеда и, в частности, о превосходных латинских переводах его трудов, выполненных двумя блестящими знатоками древне-

греческой математики — разносторонне образованным уроженцем Мессины Франческо Мавролико (1494—1575) и урбинцем Федерико Коммандино (1509—1575). Главной заслугой этих ученых явились самые переводы античных классиков, и особенно Архимеда, непосредственно с греческого, но они же оба дали первые в эпоху Возрождения образцы оригинального использования идей великого сиракузца, правда, к решению задач, еще не выходивших из очерченной им области. И Мавролико, и Коммандино хорошо усвоили метод исчерпывания и могли применять его самостоятельно. Об этом свидетельствуют «Книга о центре тяжести тел» (*Liber de centro gravitatis solidorum*, Bononiae, 1565) Коммандино и дополнения, приложенные к переводу Архимеда Мавролико. Оба они, в частности доказали, что центр тяжести сегмента параболоида вращения делит отрезок оси между вершиной и основанием в отношении 2 : 1. Архимед применяет это предложение в трактате «О плавающих телах», но его доказательство по методу исчерпывания не сохранилось, а механический вывод в «Послании» к Эратосфену в XVI в. известен не был. Мавролико опирается на то, что площади сечений сегмента, параллельные основанию, относятся, как квадраты ординат, т. е. как хорды образующей параболы. Поэтому центр тяжести сегмента можно определить так же, как треугольника, средней линией которого является ось параболоида. Подобные соображения, встречающиеся и у позднейших авторов, прокладывали путь к созданию метода неделимых. Однако доказательство Мавролико выдержано в классической форме метода исчерпывания.

В трудах Архимеда европейские математики находили много идей, стимулировавших их творчество. Но они не ограничивались одним применением античных приемов. Сложность и громоздкость классического метода исчерпывания в эпоху поисков универсальных методов исследования, расцвета алгебры и приближенных вычислений становилась и очевидной и непереносимой. Метод исчерпывания нужно было упростить, одновременно сообщив ему большую эффективность. Первые шаги к этой цели были сделаны с помощью выделения общих идей, лежавших в основании метода, и общей схемы вывода, которую греки в каждом отдельном случае повторяли применительно к свойствам рассматриваемой фигуры.

Первые обобщения метода исчерпывания

Единственной общей теоремой, которой древние постоянно пользовались при квадратурах и кубатурах, было предложение I книги X «Начал» (т. I, стр. 104), которое в наших обозначениях можно записать в виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots) = 0,$$

если $\alpha_n \leq \frac{1}{2} \alpha_{n-1}$ для всех n . Математики начала XVII в. добавили нередко встречавшийся частный случай теоремы о пределе отношения двух вариантов, как Ш. Мерз назвал переменные, образующие последовательность: если две варианты a_n , b_n находятся в данном постоянном отношении c к d , то их пределы a , b ($\neq 0$) также находятся в том же данном отношении. Это сформулировал в иных выражениях и доказал профессор высшей школы в Риме и член Академии деи Линчеи Лука Валерио (1552—1618), дарования которого высоко ценили современники, и среди них Галилей.

«Три книги о центре тяжести тел» (*De centro gravitatis solidorum libri tres*, Romae, 1604) Валерио, примыкающие к труду Коммадино, посвящены вычислению центров тяжести многих тел вращения конических сечений и их сегментов. Автор специально предупреждал читателя о своем намерении придать доказательствам этой трудной части геометрии прямой и общий характер. Выводы основаны на двух теоремах. В первой раз навсегда устанавливается, что разность между площадями вписанных и описанных около сегмента выпуклой кривой ступенчатых фигур, составленных из параллелограммов, может быть сделана, если взять их общую высоту достаточно малой, меньше любой данной площади. Другая теорема имеет предметом только что указанное свойство отношения пределов двух вариантов, которые предполагаются либо монотонно возрастающими, либо монотонно убывающими¹. Ограничение монотонными величинами, естественное в круге рассматривавшихся геометрических задач, сохранялось до самого конца XVIII в. Явного определения понятия предела и какого-либо специального термина для него у Валерио не было.

К тому же кругу идей принадлежали исследования фламандского иезуита Григория Сен Венсана (1584—1667), обучавшегося в Риме у Клавия и затем преподававшего математику в Лувене, Праге, Генте и других городах. Эта «охота к перемене мест» была, по-видимому, невольна и связана с открытым сочувствием Григория коперниканству. «Геометрический труд о квадратуре круга и конических сечений» (*Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum conï*) Григория был закончен к 1629 г., но увидел свет лишь в 1647 г. в Антверпене. К этому времени ряд остроумных приемов Григория был уже более систематически развит другими учеными, и его сочинение не привлекло того интереса, какой могло бы иметь в начале 30-х годов; к тому же оно было несколько скомпрометировано ошибкой, допущенной автором в его попытке квадратуры круга. Тем не менее «Геометрический труд» не остался без влияния, притом на столь выдающихся математиков, как Паскаль, Менголи, Грегори и Лейбниц. Последний высоко ценил открытия Григория и видел в нем одного из своих предшественников.

Большое место в «Геометрическом труде» занимают кубатуры тел, ограниченных плоскостями $z = 0$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ и цилиндрами $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$, где y и z суть ординаты конических сечений. Объем такого тела выражается интегралом $\int_a^b yzdx$. Выбирая y и z по-разному, но так, чтобы произведение yz оставалось неизменным, Григорий получал различные равновеликие объемы. Например, тело, ограниченное одинаковыми полуцилиндрами $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $z = \sqrt{a^2 - x^2}$ и плоскостями $z = 0$, $y = 0$, равновелико тетраэдру с гранями $z = 0$, $y = 0$, $y = a - x$, $z = a + x$. Наиболее известный результат Григория, вошедший во многие учебники, представляет собой вычисление объема цилиндрического копыта, как А. Г. Кестнер назвал сегмент, отсекаемый в прямом круговом цилиндре наклонной плоскостью, проходящей через диаметр основания. Григорий, конечно, не знал, что эта задача была решена в «Послании» Архимеда, по ему должны были быть известны соответствующие исследо-

¹ Точнее говоря, Валерио доказывает это свойство для нижних и верхних пределов вариант.

вания Кеплера (см. стр. 169). Упомянем еще, что Григорий первый указал в печати, что площади между гиперболой $y = c^2/x$ и ее асимптотой делятся сопряженными ординатами, следующими в геометрической прогрессии, на равновеликие полосы (при этом абсциссы и основания полос также образуют геометрическую прогрессию). Лейбниц справедливо относил это открытие, устанавливающее замечательное соотношение между гиперболической площадью и логарифмами, к лучшим достижениям Григория. Правда, в «Геометрическом труде» о логарифмах в явном виде не гово-

рится. Это вскоре сделал в форме, равносильной равенству $\int_a^b \frac{c^2}{x} dx = c^2 \ln \frac{b}{a}$,

другой уроженец Бельгии, ученик и собрат Григория по ордену иезуитов, — Альфонс Антон де Сараса (1618—1667) в «Решении задачи, поставленной Мерсенном» (*Solutio problematis a Mersenno propositi, Antverpiae, 1649*).

Регулярно применяя метод исчерпывания, Григорий, подобно Валерию, стремился выделить его общую структуру. Излагая прием вписывания в два сравниваемых тела множества очень тонких параллелепипедов, он указывал, что их число можно увеличивать так, чтобы они исчерпали эти тела (*ut corpora ipsa ... exhaustiant*). Здесь впервые, кажется, было употреблено в данной связи слово «исчерпывать». Некоторые историки науки считают его неудачным, ибо при любом числе вписанных фигур данная фигура не исчерпывается до конца (это знал и Григорий!), но предложенный термин столь метко характеризовал процесс неограниченной геометрической аппроксимации, что прочно вошел в обиход математиков.

Григорий же на примере бесконечной убывающей геометрической прогрессии впервые сформулировал определяющее свойство предела варианты. Что сумма s_n прогрессии $a + aq + \dots + aq^n$, $q = 1/4$, при достаточно большом числе членов сколь угодно приближается к $a/(1 - q)$, доказал еще Архимед. Орем мыслил бесконечную прогрессию $a + aq + \dots + aq^n + \dots$, $0 < q < 1$, как целое, равное $a/(1 - q)$ (т. I, стр. 281). Виет,

полагая в выражении $q = \frac{s_n - a}{s_n - aq^n}$ значение aq^n равным нулю, вывел, что

$q = (s - a)/s$ («VIII книга ответов по различным вопросам математики», *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII, Turonis, 1593*). Конечно, во всех этих случаях производился переход от s_n к пределу s , так же как в рассмотренной несколько далее работе Ферма, где геометрические прогрессии служат средством квадратуры кривых $y = 1/x^n$ (см. стр. 184). Григорий трактует сумму убывающей прогрессии как предел суммы s_n ее первых n членов при $n \rightarrow \infty$ со всей определенностью. Разумеется, такая трактовка в глазах математика XVII в. лишь констатировала свойство величины s , существование которой предполагается заранее; она вовсе не служила формальным определением понятия «суммы» сходящейся прогрессии. Григорий (так же, как это делал, например, Орем) исходил из данного конечного отрезка $AK = s$ и затем делил его точками B, C, D так, что

$$\frac{AB}{BK} = \frac{BC}{CK} = \frac{CD}{DK} = \dots = \lambda < 1,$$

при этом $AB, BC, CD, \dots$ образуют убывающую геометрическую прогрессию (со знаменателем $1/(1 + \lambda)$), точки $B, C, D, \dots$, как доказывал Григо-

рий, сколь угодно близко подходят к точке K , а величина AK равна «величине всей прогрессии», продолженной до бесконечности. Саму точку K Григорий называл пределом, концом (*terminus*) прогрессии: «Предел прогрессии есть конец ряда (*Terminus progressionis est seriei finis*), которого ни одна прогрессия не достигает, хотя бы была продолжена до бесконечности, но к которому может приблизиться более чем на любой данный промежуток»¹. Как видно, предел здесь введен через предельную точку последовательности точек, соответствующих частным суммам убывающей прогрессии.

Основываясь на суммировании сходящейся геометрической прогрессии, Григорий подробно рассмотрел парадокс Зенона об Ахиллесе и черепахе (см. т. I, стр. 91). Это первый известный в мировой литературе анализ такого рода, хотя возможно, что рассуждали аналогично и некоторые греки. Такое «объяснение» знаменитого парадокса вслед за Григорием давали многие авторы вплоть до наших дней, особенно благодаря изложению вопроса в широко распространенной «Теории и практике арифметики» (*Arithmeticae Theoria et Praxis*, Lovanii, 1656) другого бельгийского иезуита, упоминавшегося нами, — Андре Таке.

В только что названном учебнике Таке чисто арифметически вывел сумму бесконечной сходящейся прогрессии $u_1, u_2, \dots$ со знаменателем

$q < 1$ из суммы s_n , взятой в виде $\frac{u_1 - u_n}{s_n - u_1} = \frac{\frac{1}{q} - 1}{1}$. Этот «переход» (*transitus*) он доказывал тем, что при продолжении прогрессии до бесконечности ее «наименьший член исчезает (*evanescat*)»².

В «Четырех книгах о цилиндриках и кольцах» (*Cylindricorum et annularium libri IV*, Antverpiae, 1651)³ Таке применил систематизированный в духе Валерии и Григория метод исчерпывания к кубатуре различных цилиндрических отрезков и кольцевидных тел. 28-е определение I книги этого труда содержит описание «исчерпывания величины», весьма близкое позднейшим определениям предела: «говорят, что какая-либо величина исчерпывается вписанными в нее величинами, если вписанные величины могут отличаться от нее меньше, чем на данную величину, т. е. сколь угодно мало»⁴. Первое предложение той же книги содержит новую, несколько упрощенную формулировку теоремы Валерии: «Даны величины A и B либо поверхности, либо тела; пусть дано также некоторое отношение E к F . Если в величины A и B могут быть без конца вписываемы новые и новые величины, постоянно находящиеся в том же отношении, что E и F , и исчерпывающие величины A и B , т. е. разнящиеся от них на сколь угодно малый недостаток, то величина A будет относиться к величине B , как E к F »⁵.

Заслуживает упоминания и более раннее применение метода исчерпывания С. Стевином в работах по статике, примыкающих к трудам Архиме-

¹ *Gregorius a St. Vincentio*. Opus geometricum, Antverpiae, 1647, p. 55.

² *A. Tacquet*. Arithmeticae Theoria et Praxis. Amstelædami, 1704, p. 475.

³ Б. Кавальери (1635) назвал «цилиндрикой» тело, ограниченное произвольной замкнутой цилиндрической поверхностью и двумя секущими ее параллельными плоскостями; круговой цилиндр древних является частным случаем цилиндрики. Аналогично Кавальери обобщил определение кругового конуса, введя понятие о «копике».

⁴ *A. Tacquet*. Opera mathematica. Antverpiae, 1707, p. 448. Аналогично рассматриваются последовательности описанных фигур.

⁵ Там же, стр. 449.

да и Коммандино. Особенно интересны его числовые примеры, иллюстрирующие общие теоремы о давлении жидкости, в «Началах гидростатики» (De Beghinselen des Waterwichts, Leiden, 1586) — труде, получившем широкую известность благодаря латинскому переводу В. Снелля (1608) и французскому А. Жирара (1634). Требуется определить давление воды p на боковую стенку заполненного ею куба со стороной в 1 фут. Стенка делится горизонтальными линиями на 4, 10, 1000, n полос. Оценивая снизу и сверху давление на каждую полосу соответственно ее нижней и верхней границам, а затем суммируя неравенства, Стевин получает

$$\frac{6}{16} < p < \frac{10}{16}, 0,45 < p < 0,55, 0,4995 < p < 0,5005 \text{ и вообще } \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} < p < \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Таким образом доказывается, что разность между давлением на стенку p и весом $1/2$ кубического фута воды меньше любого данного давления. Далее Стевин проводит рассуждение, которое заменяет приведение к нелепости порознь неравенств $p > 1/2$ и $p < 1/2$: 1) если p отличается от $1/2$, то существует давление, меньшее их разности; 2) по доказанному не существует давления, меньшего, чем разность между p и $1/2$; 3) поэтому p не отличается от $1/2$, т. е. $p = 1/2$. Понятие об арифметическом пределе варианты здесь выступают с совершенной ясностью, хотя и не определяется, а давление p на стенку трактуется как предел суммы давлений на бесконечное число бесконечно узких горизонтальных ее полос. Заключительное рассуждение устанавливает единственность предела этой суммы — совпадение p и $1/2$, причем Стевин оперирует фактически с модулем разности $|p - 1/2|$. Впоследствии математики XVII в., например Б. Паскаль, уже без дальнейшего обоснования принимали, что две величины, отличающиеся на величину, меньшую любой данной, между собой равны. Заметим, что труды Стевина были, конечно, знакомы и Григорио Сен Венсау и Таке, а Паскаль хорошо знал сочинения последних.

Задачи анализа XVII века

Представители только что рассмотренного направления обобщали и упрощали классические приемы квадратур и кубатур и содействовали выделению идеи и простейших схем предельного перехода. Однако не это направление, столь близко придерживавшееся древнегреческих методов, стало ведущим в развитии инфинитезимальной математики Нового времени.

Для решения актуальных задач естествознания и математики было совершенно недостаточно выделить понятие предела последовательности и его простейшие свойства вроде приведенной теоремы Валерио. Уже на первом этапе научной революции Нового времени во внешне разнородной форме были поставлены проблемы интегрирования и дифференцирования целых, дробных и иррациональных алгебраических выражений, а также всех основных элементарных трансцендентных функций. К этому добавилась проблема интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений первого, а затем и высших порядков. Между тем античная математика не вышла за границу исследования немногих простейших зависимостей вроде $y = x$, $y = x^2$ и нескольких замечательных пределов вроде

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Ученым XVII в. предстояло, таким образом, с помощью

новой алгебры, впервые создать разветвленный аналитический аппарат математики бесконечного.

Но этого мало. В ходе исследований выяснялась необходимость и одновременно создавались условия для выработки целой системы общих понятий математического анализа. В ходе работы выяснялось внутреннее структурное единство в решении различных интеграционных проблем, будь то квадратуры, кубатуры, спрямления, вычисление центров тяжести, давления, пути движущегося тела и т. д. Такая же картина обнаруживалась в дифференциальных проблемах, шла ли речь о проведении касательных и нормалей, отыскании экстремумов, точек перегиба, кратных корней уравнений, скорости движения и проч. Лишь немногие такие наблюдения были сделаны в древности (ср. т. I, стр. 127). Вместе с тем была замечена взаимно обратная зависимость между обоими типами задач и между методами их решения, зависимость, о которой ранее и не подозревали. Все это влекло за собой неизмеримо более значительные изменения во всем математическом мышлении, чем первые обобщения Стевина, Валерия, Григория Сен Венсана и Таке. Математики начинают рассуждать в терминах теории функций, и из множества геометрических и механических образов кристаллизуются аналитические понятия функции, интеграла, дифференциалов различных порядков, производной и т. д., а из инфинитезимальных приемов вырабатываются как основные две операции — интегрирование и дифференцирование, к которым добавляется не менее важное разложение функций в бесконечные ряды.

Закладывая фундамент исчисления бесконечно малых, ученые XVII в. прежде всего отталкивались от античного наследия, например от идей математического атомизма или интегральных сумм Архимеда. Но магистральный путь в создании исчисления бесконечно малых приходилось прокладывать заново, руководствуясь совсем иными целями и средствами. Это относится прежде всего к центральной идее универсального научного метода, реализацией которой было операционное исчисление бесконечно малых, подобно е буквенной алгебре. Это относится и к представлению функций в форме аналитических выражений, особенно бесконечных рядов, произведений и непрерывных дробей. Во всем этом пришлось не только далеко выйти за рамки античных методов, но и отказаться на довольно долгое время от соблюдения норм научной строгости, бывших стандартными в доказательствах по методу исчерпывания.

Новые методы и математическая строгость

С самого начала XVII в. многие выдающиеся математики стали применять инфинитезимальные приемы, опиравшиеся на представление фигур как сумм бесконечного числа бесконечно малых элементов того же или даже низшего измерения, что и рассматриваемая фигура; во втором случае иногда для осторожности говорили не о сумме, а о совокупности неделимых, образующих фигуру. При вычислении пути по данной непрерывно меняющейся скорости принимали, что в весьма малые промежутки времени скорость постоянна, а от одного промежутка к другому меняется скачками. Чтобы провести касательную, кривую трактовали как ломаную с бесконечно большим числом бесконечно малых сторон. В нарушение законов арифметики в инфинитезимальных равенствах пренебрегали бесконечно малы и слагаемыми высших порядков и т. д. Так поступали Непер,

Кеплер, Декарт, Ферма, Кавальери и многие, многие другие вплоть до Ньютона и Лейбница. Именно эти люди в большинстве своем интенсивно развивали аппарат вычислений с бесконечно малыми, в то время как ученые, применявшие в несколько облегченной форме методы древних, как правило, мало заботились о совершенствовании технических средств, без которых движение вперед было невозможно.

Очень скоро сложилась парадоксальная ситуация: результаты, достигнутые математиками, работавшими в классическом стиле, были исчезающе малы по сравнению с результатами, достигнутыми математиками, работавшими в новом, более свободном стиле. Основное нововведение состояло, коротко говоря, в открытом применении неуточненных и неуточняемых понятий бесконечно большого и бесконечно малого, которые лишь в неявной форме имелись в творениях греков (о «Послании» Архимеда, повторяем, в XVII в. не знали). Термин «бесконечное» более не отпугивает математиков, причем бесконечными величинами начинают смело оперировать, следуя чаще всего аналогиям с действиями над конечными величинами, а заодно применяются неполная индукция и умозаключения по вероятности. Множество новых открытий оправдывало эту смелость. Несомненная нестрогость приемов обычно не влекла за собой ошибок, от которых исследователей уберегала правильная интуиция.

Правда, новая математика бесконечного вызвала возражения со стороны ревнителей старины. Всего через год после издания «Нового измерения винных бочек» Кеплера учительствовавший в Париже шотландский математик, ученик Виета, Александр Андерсон (1582—1620) выступил с критикой Кеплера как за нестрогость его приемов обращения с бесконечно малыми, так и за то, что в этих приемах Кеплер усмотрел сущность метода Архимеда (ср. стр. 170). Свое сочинение Андерсон озаглавил «Иском Архимеда» (*Vindiciae Archimedis, Parisiis, 1616*). Критиковал приемы Кеплера, как и метод неделимых Кавальери (не отвергая, впрочем, их эвристической ценности), и швейцарец Пауль Гульдин (1577—1643), обучавшийся вместе с Григорием Сен Венсаном у Клавия и затем преподававший математику в иезуитских колледжах Рима, Вены и Граца. Свои возражения Гульдин поместил в сочинении «О центре тяжести» (*De centro gravitatis, Viennae, 1635—1641*), во второй книге которого (1640) привел две известные теперь каждому студенту втуза теоремы об объеме и поверхности тела вращения замкнутой фигуры вокруг непересекающей ее оси. Эти теоремы без доказательств имелись еще у Паппа, но не в издании, бывшем доступным Гульдину. Впрочем, доказательство самого Гульдина весьма туманно, и более ясный вывод — по методу неделимых — предложил Кавальери в своих «Геометрических этюдах» (1647; см. стр. 175). К числу ученых, отвергавших новые методы из-за их нестрогости, принадлежал и Таке, считавший, что фигуры можно представлять себе образованными путем «течения» неделимых, но не составленными из них.

Замечания этих и других критиков не были лишены основания. Однако они не понимали ни глубоко прогрессивного характера критикуемых приемов, ни их духовной связи с приемами древних, в частности Архимеда. Сами творцы математического анализа XVII в. также сознавали недостаточную логическую прочность его фундамента и нередко старались, сколько можно, его укрепить. Отдельные ученые продолжали облекать новые инфинитезимальные приемы в старые формы метода исчерпывания. Так поступал, например, Дж. Грегори, который первый провозгласил, что предельный переход надлежит поставить в один ряд по важности с опера-

циями алгебры (стр. 151). Однако старые формы решительно стесняли прогресс математики, а выработать новые строгие приемы рассуждений не было ни времени, ибо слишком многие более важные задачи дожидались решения, ни острой потребности, ибо новые методы при надлежащем их употреблении давали совершенно несомненные результаты. К тому же для удовлетворяющего всех обоснования анализа недоставало сколько-нибудь единой системы понятий и операций. И так как дело не ждало, большинство математиков без тревоги применяли методы, нестрогость которых с лихвой искупалась их плодотворностью.

Любопытны высказывания некоторых ученых. Так, Кавальери утверждал, что строгость — забота философов, а не геометров. Блез Паскаль несколько позднее говорил, что не логика, а приличествующая случаю ясность достаточна для правильных умозаключений.

Само существование метода истощивания успокаивало ученых и позволяло им, не взирая на критику извне и собственные сомнения, быстро идти вперед по пути все множившихся открытий. Все были уверены, что результаты, полученные нестрогими методами, можно при желании доказать с помощью строгих методов древних. Ферма писал: «Было бы легко дать доказательство в духе Архимеда. . . достаточно предупредить об этом раз и навсегда, чтобы избежать постоянных повторений»¹. То же говорил и Паскаль: «Один из этих методов отличается от другого только способом выражения»², и И. Барроу: «Это доказательство можно было бы удлинить апагогическим (т. е. методом приведения к противоречию. — *Ред.*) рассуждением, но для чего?»³. Современник Ферма Роберваль, сторонник метода неделимых, в своих лекциях во Французском коллеже специально разъяснял, как «приводить доказательства с помощью неделимых к доказательствам древних геометров с помощью вписанных и описанных фигур»⁴. Для этого ему служила «основная лемма», по содержанию совпадающая с теоремой Валерио, хотя и высказанная в других выражениях. По существу, однако, все это были красивые фразы, успокаивавшие совесть математиков, но маскировавшие суть проблемы: строгое обоснование новых методов. На самом деле, далеко не все результаты, полученные с их помощью, можно было бы передоказать посредством античных приемов, которые оказывались, например, недостаточными, без дополнительного развития, при рассмотрении площадей или объемов бесконечно простирающихся фигур (несобственных интегралов), бесконечных рядов, бесконечно малых высших порядков и т. д. Для всего этого требовалась гораздо более развитая теория предельных переходов, чем та, которой располагали ученые XVII и даже XVIII вв. Такая теория была создана на гораздо более богатой фактической основе плеядой первоклассных математиков XIX в. от Коши до Вейерштрасса.

Удивительное обстоятельство, что почти все результаты оказывались верными, в чем убеждала вся практика как математиков, так и ее приложений, объяснялось прежде всего тем, что новые методы применялись там, где они работали безотказно, именно в области аналитических функций. И разумеется, совпадение, хотя бы в простейших случаях, результатов, выведенных с помощью новых методов, с ранее известными (скажем, в

¹ P. Fermat. Oeuvres, v. 1. Paris, 1891, p. 257.

² B. Pascal. Oeuvres, v. 8. Paris, 1910, p. 352.

³ I. Barrow. Mathematical works. Cambridge, 1860, p. 251.

⁴ E. Walker. A Study of the Traité des indivisibles of Gilles Personne de Roberval.

случае квадратуры параболы или проведения к ней касательной) позволяло с уверенностью двигаться вперед. Если же замечали, что получается осечка (скажем, при вычислениях с рядами вне промежутка сходимости), то останавливались и предупреждали об опасности других, хотя и не могли установить ни причины возникающих трудностей, ни границы применимости метода в общем виде.

Новым критерием, позволявшим отделять корректное рассуждение от некорректного, было, как правило, умение построить аналитический аппарат, допускавший числовую проверку прямым вычислением. Современниками такое уязвимое положение ощущалось очень остро. Мишель Ролль, резюмируя итог столетних усилий схватить существо вопроса, писал, что новое исчисление есть коллекция гениальных ошибок. Вольтер ядовито заметил, что это исчисление представляет собой искусство вычислять и точно измерять вещи, существование которых не может быть доказано.

Триумф новой науки побуждал математиков неустанно совершенствовать свои приемы на основе правильно понятого «экспериментального» метода. Решая конкретные задачи, они вырабатывали новые и новые эвристические схемы математических рассуждений. Изучая работы творцов нового анализа, от Кеплера и Кавальери до Ньютона и Лейбница включительно, можно увидеть, как не очень ясные индуктивные приемы превращаются, с одной стороны, в некую общую науку — эвристику (Декарт, Лейбниц), а с другой стороны, становятся мощными и верными методами математики (математическая индукция, рекуррентные соотношения и интерполяция). В работах Декарта и Лейбница можно найти вполне современное понимание задач эвристики как науки делать открытия, описывать и символически изображать законы человеческого мышления, позволяющие решать определенные классы задач.

Переходя к истории исчисления бесконечно малых, мы в первую очередь остановимся на развитии основного понятия анализа, которое стало в центре всей математики XVII—XVIII вв. — понятия о переменной величине и функциональной зависимости.

Развитие понятия функции

Ростки этого понятия, хотя и неосознанного и невыделенного, имелись в греческой математике и естествознании. Уже в попытках установить простейшие законы акустики, приписываемых ранним пифагорейцам, нашли выражение поиски количественных взаимосвязей между различными физическими величинами, как длина и толщина струны и высота звука. Позднее, в александрийскую эпоху, астрономы разработали целую тригонометрию хорд, соответствующих дугам окружности фиксированного радиуса, и с помощью теорем геометрии и интерполяции вычислили таблицы, равносильные таблицам синусов, которыми несколько веков спустя стали оперировать индийцы. Отметим также таблицы эмпирических «ступенчатых функций» и «зигзагообразных функций» вавилонской астрономии времен Селевкидов.

Но древность имела дело не только с табулированными функциями. В теории конических сечений основную роль играли так называемые симптомы — формулировавшиеся словесно уравнения этих кривых, причем, в отличие от таблиц значений строго индивидуализированных функ-

ций, симптомы выражают целые классы соответствий, скажем, для координат любого эллипса, или параболы или гиперболы. В некоторых случаях встречались и другие классы переменных величин, например в предложении I книги X «Начал» Евклида (см. т. I, стр. 101 и 130).

Объем множества функций, изучавшихся в античной математике, не был велик, но оперировали с ними в ряде задач довольно сходно с тем, как это вновь стали делать позднее: изучали их свойства, табулировали, интерполировали, определяли экстремумы, решали отдельные задачи, равносильные нашему интегрированию. Были сделаны также первые шаги в классификации соответствий: различали плоские задачи, которые можно построить с помощью прямых и окружностей, пространственные, требующие применения по крайней мере одного конического сечения, и линейные, для построения которых необходимы еще другие, более сложные кривые.

Аппарат аналитических выражений и символические формулы отсутствовали. Только у Диофанта появляются зачатки алгебраической символики, не получившие, однако, дальнейшего развития еще в течение многих столетий. Как ни значительны эти достижения, сыгравшие важнейшую роль в последующем, греки не выделили общей идеи, присущей всем изучавшимся взаимозависимостям, — идеи функции или переменной величины, так же как не было у них понятия предела, бесконечно малой и т. д.

Сама идея изменения переменной величины не была чужда греческой мысли. Со времени Гераклита и Зенона обсуждались проблемы движения, непрерывности, бесконечного. Вся «Физика» Аристотеля, по существу, трактует об этом. Аристотель, как мы знаем (т. I, стр. 282) различал «движение в отношении качества», т. е. качественное изменение, «движение в отношении количества» и «движение в отношении места», т. е. перемещение. Проводилось также различие между равномерным и неравномерным движением. Но как раз «движение в отношении количества» и «перемещение», которые позднее нашли выражение в понятии переменной величины, не стали у греков объектом математического исследования. Греческая механика и астрономия не вышли за границы равномерного движения, неравномерные движения небесных светил в античной картине мира сводились к совокупностям равномерных круговых перемещений, неравномерное движение, как таковое, не изучалось. Из математики по возможности изгонялись кинематические представления; несколько предложений Евклида, в которых применяется движение и наложение, как и отдельные случаи кинематического определения кривых (скажем, спирали Архимеда), не меняют общей картины.

Мы сказали, что у так называемых пифагорейцев возникло представление о естественнонаучных законах типа функциональной зависимости. Однако эта концепция закона природы не получила в греческой науке, в частности в астрономии, ни господства, ни заметного развития.

Почти полное отсутствие символики и недостаточное развитие понятия числа служили дополнительными внутриматематическими препятствиями для усмотрения в зависимостях числовых соответствий и перехода к их аналитическому выражению.

Понятие функции впервые явно выступает в средневековой Европе в связи с возобновлением попыток математического изучения различных естественных явлений и особенно с расцветом кинематических исследований в Оксфордской и Парижской школах XIX в. Мы подробно говорили ранее о «калькуляциях» Суайнсхеда, о теории «конфигурации качеств»

Орема (см. т. I, стр. 273 и след.) и о разработке этими и другими учеными понятия о переменной величине как о градусе (степени) или течении качества, а также понятия о функциональном соответствии, заданном словесным правилом или еще (у Орема) графически. Особого термина для функции тогда, правда, не было; вместо него пользовались описательными оборотами или уже наличным словом «отношение» (*proportio*), применявшимся в расширенном смысле. Напомним слова Орема: «...какое бы отношение ни оказывалось между одной интенсивностью и другой..., такое же отношение обнаруживается и между одной линией и другой, и наоборот»¹. В возникновении этих идей решающее значение имел синтез кинематической и механической мысли. Вместе с тем в средневековой механике появляются примеры изучения неравномерных движений.

Теория конфигурации качеств пользовалась большой известностью в XV и первой половине XVI в., особенно в Англии, Франции, Италии и Испании. Ее излагали в университетских курсах, и, помимо большого числа рукописей, ей было посвящено несколько напечатанных книг. Все же сколько-нибудь значительного развития она в это время не получила и оставалась в стороне от господствующих научных направлений. Переворота в науке эта теория не произвела. Если в разработке некоторых понятий математики (и механики) обобщающая и абстрагирующая мысль оксфордских и парижских ученых продвинулась гораздо дальше, чем у их античных предшественников, то по числу и значимости конкретных открытий достижения Суайнсхеда или Орема не могут идти в сравнение с блестящими результатами Архимеда или Аполлония. Между теорией конфигурации качеств и новыми проблемами квадратур, кубатур, центров тяжести, касательных и т. д. вообще почти не было прямого соприкосновения.

Хотя вопрос о влиянии этой теории на науку Нового времени изучен далеко не полностью, но сходство ряда идей и приемов XIV и XVII вв. несомненно и прямое или косвенное действие средневековых концепций на духовное развитие Непера, Галилея, Кавальери, Декарта, Барроу, Ньютона, Лейбница и других математиков представляется весьма вероятным, а в нескольких случаях и достоверным. Об этом свидетельствуют употребление таких терминов, как мгновенная скорость и текущая величина, поразительное сходство вывода закона падения тяжелых тел у Галилея и закона равномерно-неравномерного движения у Орема, не менее удивительное сходство между представлением величин отрезками у Декарта и Орема, кинематическая трактовка основных понятий анализа у английских математиков и многие другие факты. Галилей упоминает Суайнсхеда, а Лейбниц высоко ценил этого замечательного ученого. Если те или иные из названных математиков XVIII в. даже и не слышали о Суайнсхеде или Ореме, то воззрения последних могли быть переданы и другими путями, не через слушание лекций и чтение первоисточников.

Для последующего развития учения о функциях решающее значение имели бурный рост вычислительной математики, в частности тригонометрии и учения о логарифмах, с одной стороны, и возникновение буквенной, символической алгебры — с другой, — процессы, с которыми было тесно связано расширение понятия о числе, к концу XVI в. охватившего всю область действительных чисел и, с некоторыми оговорками, и колебаниями,

¹ Н. Орем. Трктат о конфигурации качеств. Перевод и примечания В. П. Зубова. Историко-математические исследования, 1958, вып. XI, стр. 637.

даже мнимых и комплексных чисел. Это были, так сказать, внутриматематические предпосылки введения понятия функции как непрерывного соответствия между числовыми множествами и для их аналитического выражения с помощью формул. Буквенные коэффициенты в алгебре Виета являлись уже переменными, подчиненными правилам определенного исчисления, и введение их стало важным этапом в истории понятия функции. Однако сам Виет не использовал свое замечательное открытие для дальнейшего развития понятия функции; ему не присуще было «функциональное мышление».

В это же время, особенно с начала XVII в., в математическом естествознании, в первую очередь в астрономии и механике, во все возрастающей мере и со все большей отчетливостью укрепляется упоминавшаяся новая концепция количественного закона природы и в ходе исследований быстро возрастает число подлежащих анализу разнообразных зависимостей и кривых. При этом наряду с алгебраическими законами (например, третий закон Кеплера) появляются и трансцендентные (например, оптический закон Снелля — Декарта, колебательные процессы).

Аналитическое представление функций

Следствием всего этого явилось распространение нового способа задания функций, который на долгое время стал основным в математике и ее приложениях. Как и ранее, функции все еще нередко задаются словесно, графически, кинематически или таблично, но на первый план выдвигается их аналитическое выражение.

Мы можем почти точно указать момент этого поворота. Еще на рубеже XVI—XVII вв. функции задаются только с помощью прежних средств. Так была введена важнейшая, наряду с тригонометрическими, логарифмическая функция (см. стр. 59). Всего через 15—20 лет после издания трудов изобретателей логарифмов Непера и Бюрги Ферма и Декарт, прилагая алгебру к геометрии кривых линий, независимо друг от друга показали, как представлять зависимости между двумя переменными величинами посредством уравнений. Ферма это сделал в рукописном сочинении «Введение в изучение плоских и телесных мест», а Декарт в «Геометрии» (1637). Мы подробно рассмотрели оба труда ранее (стр. 101 и след.); приведем лишь еще одно высказывание Декарта, со всей ясностью описывающее, как уравнение в y и x определяет собой зависимость между двумя совокупностями переменных величин и вместе с тем позволяет строить по точкам график этой зависимости: «Придавая линии y последовательно бесконечное количество различных значений, мы найдем также бесконечное количество значений x и, таким образом, получим бесконечное количество различных точек...: они опишут требуемую кривую линию»¹.

Употребление аналитических выражений, позволяющих производить вычисления почти, так сказать, непосредственно, легко обозримых и отличимых друг от друга, наконец, пригодных для бесчисленных преобразований по определенным правилам, раскрывало совершенно новые перспективы. Возникнув в ходе применения к геометрии, это новое понятие функции немедленно распространилось на другие области, прежде всего

¹ Р. Декарт. Геометрия, стр. 27.

в сферу инфинитезимальных вычислений, которые лишь на этой основе смогли перерасти в дифференциальное и интегральное исчисление.

Вначале круг аналитически выражимых функций ограничивался алгебраическими; Декарт даже исключил из своей геометрии все механические (трансцендентные) кривые, как не поддающиеся его общему методу исследования. Примерно через четверть столетия открытие, сделанное независимо друг от друга П. Менголи, Н. Меркатором, Дж. Грегори и И. Ньютоном, позволило распространить аналитическое представление на любые изучавшиеся в то время зависимости. Это было открытие разложения функций в степенные ряды, к которым добавлены были затем другие виды бесконечных выражений — бесконечные произведения, непрерывные дроби, а еще позднее — тригонометрические ряды и т. д. Бесконечные степенные ряды — геометрическая прогрессия и еще некоторые — были известны ранее, но идея выражать с помощью таких рядов любые функции была совершенно новой. Во второй половине XVII в. степенной ряд делается важнейшим и, как думали еще долгое время, универсальным средством аналитического выражения и исследования любых функций, недаром одно из основных произведений Ньютона называлось «Метод флюксий и бесконечных рядов».

Определение понятия функции

От первых описаний нового представления о независимой переменной, последовательно и непрерывно принимающей бесконечно много значений, и ее функции, относящихся к 30-м годам XVII в., было уже недалеко до формулировки соответствующих определений. Еще довольно долго при этом функция продолжает выступать в механическом или геометрическом облачении. Здесь действовали и традиции и то обстоятельство, что анализ возникал на почве механических и геометрических рассуждений. Основные понятия анализа не были еще выделены в отвлеченной арифметико-алгебраической форме. Анализ бесконечно малых, только формировавшийся, еще не стал автономным по отношению к тем наукам, нужды которых требовали его разработки. У самих Декарта и Ферма, аналитическое выражение функции было неразрывно связано с его геометрическим образом.

С особенной яркостью кинематически-геометрическая концепция анализа была высказана у Ньютона, развивавшего в этом направлении идеи своего учителя И. Барроу.

Ньютон, как и Барроу, берет в качестве всеобщего аргумента время, а зависящие от него переменные вводятся как непрерывно текущие величины, обладающие теми или иными скоростями изменения. Эта концепция кратко сформулирована Ньютоном в письмах к другому его учителю — Дж. Валлису от 27 августа и 17 сентября 1692 г., напечатанных последним в выдержках в 1693 г. Здесь мы читаем: «Под текущими величинами (*Puentes quantitates*) он (т. е. Ньютон. — *Ред.*) понимает неопределенные величины (*indeterminatae*), т. е. те, которые постоянно (*perpetuo*) возрастают или убывают при образовании кривых посредством местного движения, а под их флюксиями (*Fluxio*) понимает скорость возрастания или убывания»¹. Более подробно те же идеи изложены в ряде других сочине-

¹ И. Ньютон. Математические работы, стр. 256—257.

ний Ньютона, например в «Методе флюксий и бесконечных рядов». Впрочем, у Ньютона уже явно заметно стремление более отвлеченно трактовать основные понятия анализа. Так, о всеобщем аргументе — времени в «Методе флюксий» говорится: «Но так как мы здесь привлекаем к рассмотрению время лишь в той мере, в которой оно выражается и измеряется равномерным местным движением, и так как, кроме того, сравнивать друг с другом можно только величины одного рода, а также скорости, с которыми они возрастают или убывают, то я в нижеследующем рассматриваю не время как таковое, но предполагаю, что одна из предложенных величин, однородная с другими, возрастает благодаря равномерному течению, а все остальные отнесены к ней как ко времени. Поэтому по аналогии за этой величиной не без основания можно сохранить название времени»¹. И несколько далее флюенту, играющую роль независимой переменной, Ньютон именует соотнесенной величиной (*quantitas correlata*), а зависящую от нее — отнесенной величиной (*quantitas relata*). При этом кинематически вводятся лишь основные понятия, фактически метод флюксий строится для флюент, выраженных аналитически либо в конечном виде, либо через суммы бесконечных рядов.

Отметим, что Барроу в одном случае со всей определенностью заметил, что «не имеет значения», изменяется ли рассматриваемая величина скорости «регулярно по некоторому закону или же нерегулярно»², иначе говоря имеется или нет аналитическое определение этой величины. Однако столь широкое понимание функциональной зависимости, выходящее за рамки фактически доступных средств вычислений, в XVII в. не представляло интереса, а для его теоретического исследования не было никаких средств. Важность понятия функции как произвольного (в некотором смысле) соответствия была обнаружена только в середине XVIII в. Эйлером (см. т. III, гл. 7), а вся плодотворность этой идеи, при соответствующем ее уточнении, как и все ее трудности, выяснилась еще позднее, — в теории функций XIX—XX вв.

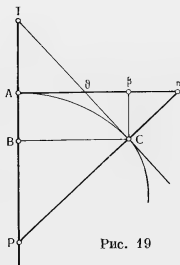
Лейбниц вначале подходил к понятиям разрабатывавшегося им дифференциального и интегрального исчисления, отправляясь от геометрии кривых линий. С этим оказалось связанным первоначальное употребление термина «функция». Это слово впервые появляется в рукописях Лейбница от 1673 г., в частности в рукописи, озаглавленной «Обратный метод касательных или о функциях» (*Methodus tangentium inversa, seu de functionibus*). Сначала здесь идет речь об отыскании для «геометрической» или «негеометрической» кривой *ABCD*, у которой отношение (*Relatio*) между аппликатой (ординатой) *ED* и абсциссой *AE* выражено каким-либо данным уравнением, ее подкасательной, поднормали и других связанных с кривой отрезков. Затем Лейбниц переходит к обратной задаче отыскания «аппликаты» по данному свойству подкасательной или «другого рода линий, выполняющих для данной фигуры некоторую функцию» (*ex aliis linearum in figura data functiones facientium generibus assumtis*)³. После того функциями именуются сами такие отрезки, связанные с кривой.

Напомним, что латинский глагол *fungor, functus sum, fungi* означает «осуществлять», «выполнять» (обязанность), «выражать» и т. д. В том же

¹ И. Ньютон. Математические работы, стр. 45.

² I. Barrow. Mathematical works. Cambridge, 1860, p. 191.

³ См. D. Mahnke. Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte des höheren Analysis. Berlin, 1926, S. 47. Эти слова находятся в 6-й снизу строке второй фотографии на стр. 145.



смысле слово «функция» применяется в статье Лейбница, напечатанной в *Journal des Sçavans* в 1694 г. «Я,— писал здесь Лейбниц,— называю функциями (*fonctions*) всякие части прямых линий, которые получают, проводя бесчисленные прямые, соответствующие неподвижной точке и точкам кривой, каковы: абсцисса AB или $A\beta$ (рис. 19), ордината BC или βC , хорда AC , касательная CT или $C\theta$, нормаль CP или $C\pi$, подкасательная BT или $\beta\theta$, поднормаль BP или $\beta\pi$... и бесчисленное множество других, построение которых более сложно...»¹. Еще ранее этот термин мимоходом был употреблен в одной статье Лейбница, опубликованной в «*Acta Eruditorum*» в 1692 г.

Однако такое определение функции не соответствовало ни более широкому фактическому объему этого понятия, ни приемам оперирования ими, ни свойственной анализу Лейбница и его школы широте и общности в трактовке основных понятий. Вскоре после выхода указанной работы понятия функции становится предметом обсуждения в переписке между Лейбницем и его учеником И. Бернулли. В том же 1694 г. в «Acta Eruditorum» Бернулли, не употребляя, правда, слово «функция», обозначил мимоходом буквой n любое «количество, как-либо образованное из неопределенных (величин — *Ред.*) и постоянных (*posito* n *esse quantitate quomodocunque formatam ex indeterminatis et constantibus*)»². Три года спустя в том же журнале Бернулли для этой цели употребил символы X и ξ и в письме к Лейбницу от 26 августа 1698 г. указал, что эти символы лучше, так как тогда «сразу видно, от какой переменной является функцией» X или ξ ³. Лейбниц одобрил предложение И. Бернулли, со своей стороны предложив особые знаки для различия нескольких функций аргумента или для функций двух и большего числа переменных — знаки, не появившиеся тогда в печати и не вошедшие в употребление. В 1698 г. в переписке обоих ученых слово «функция» применяется уже в смысле аналитического выражения. Входят в обиход и введенные Лейбницем слова «переменная величина» и «постоянная величина», хотя, как мы только что видели, в ходу остается и термин «неопределенная величина».

¹ Г. В. Лейбниц. Избранные отрывки из математических сочинений, стр. 180.

² См. *F. Cajori*, A history of mathematical notations, II. London, 1930, p. 267.

³ Там же, стр. 267.

Прошло, однако, еще двадцать лет, прежде чем такое определение функции появилось в печати. В течение этого времени и слово «функция» оставалось мало кому известным, хотя термины «постоянная» и «переменная» уже получили распространение. Слова «функция» нет еще в изданном в Лейпциге в 1716 г. «Математическом словаре» (Mathematisches Lexicon) уже упоминавшегося профессора Христиана Вольфа. Правда, в этом словаре уже есть статьи «Постоянная величина» (Quantitas constans, eine unveränderliche Grösse) и «Переменные величины» (Quantitates variables, veränderliche Grössen). Последние определяются, как те, что «постоянно (immer) увеличиваются или уменьшаются, когда другие увеличиваются или уменьшаются»¹, причем для примера указана зависимость между абсциссами и ординатами (у Вольфа «полуординатами») кривой линии и добавлено, что различение между обеими категориями величин «очень нужно» в новом анализе Лейбница. Об аналитическом выражении зависимой переменной величины через независимую здесь не упоминается, но об этом говорится в другой связи в статье «Абсцисса (Abscissa, die Abscisse)»: «Кривые линии принято отличать друг от друга с помощью отношения (Relation) абсциссы AP к половине ординаты PM »². В определении переменной величины Вольф характеризует идею соответствия между переменными весьма общим образом, но вряд ли он сам придавал этому какое-либо особое значение.

Определение функции, как аналитического выражения, было впервые со всей отчетливостью сформулировано в печати в статье И. Бернулли, опубликованной в *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* за 1718 г. В ней И. Бернулли писал: «Определение. Функцией переменной величины здесь называется количество, составленное каким угодно способом из этой переменной величины и постоянных»³. И здесь же он предложил в качестве «характеристики» функции (термин Лейбница) греческую букву φ , записывая при этом аргумент еще без скобок, так: φx . Скобки, как и знак функции f , ввел Эйлер в 1734 г.

Какие способы «составления» функций имел в виду И. Бернулли, он не уточнил, — это сделал только Эйлер еще тридцать лет спустя (т. III, гл. 7).

Фактически математики XVII в. оперировали аналитическими функциями, представимыми в рассматриваемой области в виде бесконечных степенных рядов. К концу этого столетия они регулярно применяли разнообразные алгебраические функции, все элементарные трансцендентные и производили суперпозиции функций. Высшие трансцендентные, например эллиптические интегралы, они еще нередко представляли геометрически (в данном случае, как дуги эллипса), а вместе с тем выражали их бесконечными рядами. По традиции геометрическое представление функций часто применялось и к новым элементарным трансцендентным. Еще в первой четверти XVIII в. говорили, например, о выражении интегралов с помощью квадратуры гиперболы и других конических сечений (а не с помощью логарифмов и круговых функций). В учении об эллиптических интегралах геометрические образы и термины сохранялись на протяжении всего XVIII в.

¹ Ch. Wolff. Gesammelte Werke, Th. I, Bd. II. Hildesheim, 1965, S. 1149.

² Там же, стр. 5.

³ Joh. Bernoulli. Opera omnia, v. II. Lausannae — Genevae, 1742, p. 241.

В классификации кривых и функций вместо терминологии Декарта (геометрические и механические кривые) утвердилось различие алгебраических и трансцендентных кривых и функций, предложенное Лейбницем. Это не было простой заменой названий, но выражало противопоставление нового анализа декартовой концепции математики. В одном наброске 1678 или 1679 г. Лейбниц назвал кривую с уравнением определенной степени «аналитической», а логарифмическую кривую — простейшей среди трансцендентных. В статье «Об определении размеров фигур» (*De dimensionibus figurarum inveniendis*, 1684) он вводит современную терминологию, одновременно полемизируя с Декартом, исключавшим неалгебраические кривые из геометрии. «Разумеется, — писал Лейбниц, — Декарт сделал это потому именно, что не мог привести такие линии к уравнениям и исследовать их по своим правилам». На самом деле исключенные Декартом кривые, имеющие самое широкое употребление, можно выразить с помощью «уравнений неопределенной степени или трансцендентных» и «подчинить вычислению...», но только это вычисление будет иной природы, чем применяемое обычно¹. Определение Лейбница совпадает с современным определением трансцендентных функций как аналитических функций, не являющихся алгебраическими. Внутреннее свойство трансцендентных функций комплексного переменного (наличие у них по крайней мере одной особой точки, помимо полюсов и точек разветвления конечного порядка) было установлено во второй половине XIX в.

Более подробная классификация функций была предложена Эйлером (см. т. III, гл. 7).

В конце XVII в. появляются также примеры функций двух (стр. 146) и большего числа переменных. А в самые первые годы XVIII в. были сделаны первые шаги в области теории функций комплексного переменного, — об этом говорится в конце настоящей главы.

Бесконечные последовательности.

Джеме Грегори

Мы уже говорили, что развитие вычислительной техники привело в XVII в. к открытиям, значение которых выяснилось значительно позднее (см. стр. 63), в первую очередь к сходящимся бесконечным последовательностям. С бесконечными последовательностями математики встречались всякий раз, когда удавалось найти некоторое рекуррентное правило, справедливое на любом шагу вычислений, будь то иррациональные числа, вроде $\sqrt{2}$ или π либо же иррациональные корни алгебраических уравнений, значения тригонометрических функций и логарифмов и т. д. К такого же рода последовательностям приводили задачи квадратур и кубатур.

Новый тип последовательностей — бесконечные произведения, впоследствии ставшие важной составной частью анализа, — был введен Влетом в том самом сочинении, в котором он произвел суммирование бесконечной геометрической прогрессии (стр. 133). Напомним (см. т. I, стр. 314), что занимаясь задачей о квадратуре круга, он вывел зависимость между площадями S_n и S_{2n} вписанных в этот круг правильных n - и $2n$ -

¹ Г. В. Лейбниц. Избранные отрывки из математических сочинений, стр. 174.



Джемс Грегори
(оригинал портрета хранится в Шотландской национальной галерее)

угольников. Если обозначить r — радиус данного круга, а r_n — радиус круга, вписанного в n -угольник, то

$$\frac{S_n}{S_{2n}} = \frac{r_n}{r} = \cos \frac{\pi}{n}.$$

Полагая последовательно $n = 4, 8, 16, \dots$ и естественно принимая, что S_{2n} имеет пределом площадь круга S , Виет, перемножая полученные таким образом равенства, нашел, что

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} &= \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{16} \dots = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}} \right)} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}} \right)} \right)} \dots \end{aligned}$$

Некоторое сходство с приемом Виета имеет прием, употребленный для исследования квадратуры произвольного сектора центрального кониче-

ского сечения шотландцем Джемсом Грегори (1638—1675). Воспитанник Абердинского университета, Грегори посвятил свою недолгую жизнь главным образом математике, но успешно занимался также астрономией и оптикой. Так, в 1663 г. он предложил строить зеркальные телескопы — идею, реализованную независимо от него Ньютоном в 1672 г. Несколько лет занятий в Падуе позволили Грегори глубоко познакомиться с достижениями итальянской школы анализа, и два изданных им здесь труда по инфинитезимальной математике создали ему международную известность. Это были «Истинная квадратура круга и гиперболы» (*Vera circuli et hyperbolae quadratura, Patavii, 1667*) и «Всеобщая часть геометрии» (*Geometriae pars universalis, Patavii, 1668*). Возвратившись в Англию, он тотчас опубликовал еще «Геометрические этюды» (*Exercitationes geometricae, Londini, 1668*); и в том же 1668 г. он был избран членом Королевского общества и назначен профессором математики родного университета.

Годы работы Грегори в Абердине были отмечены целым рядом новых открытий, но он их более не публиковал, отчасти с целью не раскрывать ранние времена методы, приносившие ему богатые плоды. Отдельные найденные им результаты он сообщал в письмах к лондонскому любителю математики и члену Королевского общества Джону Коллинсу (1625—1683), который поддерживал личное знакомство и вел переписку почти со всеми английскими математиками, нередко кратко информируя их о новых научных достижениях. Последний год жизни Грегори был профессором в Эдинбурге.

Грегори принадлежат выдающиеся заслуги в разработке математического анализа и, в частности, теории рядов, где его пути часто шли параллельно ньютоновым. Если бы он обнародовал все свои открытия и прожил еще несколько лет, он, быть может, встал бы в один ряд с обоими создателями исчисления бесконечно малых. Однако этого не случилось, а несколько самых значительных его результатов были обнаружены в его рукописном наследии лишь в последние десятилетия.

Метод Грегори, о котором идет речь, изложен в «Истинной квадратуре круга и гиперболы». Целью автора было доказать, что площадь произвольного сектора круга, а также эллипса и гиперболы нельзя точно выразить через площади вписанных или описанных треугольников и четырехугольников посредством конечного числа пяти действий алгебры — сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения корней. Иными словами, Грегори стремился доказать, что круговые и логарифмическая функции не являются алгебраическими.

Обозначим площадь сектора круга через S , площадь соответствующего ему центрального треугольника OAB через i_1 , а площадь четырехугольника $OACB$, где BC и AC — касательные, через I_1 (рис. 20). Пусть D — точка касания прямой, параллельной AB , тогда OD делит данный сектор на два равных сектора. Если обозначить через i_2 сумму площадей вписанных в последние треугольников, через I_2 — сумму площадей описанных четырехугольников и аналогично образовать i_3, I_3, i_4, I_4 , и т. д., то вообще

$$i_n = \sqrt{i_{n-1} I_{n-1}}, \quad I_n = \frac{2i_n I_{n-1}}{i_n + I_{n-1}}.$$

Последовательности, задаваемые этими выражениями, как угодно точно аппроксимируют площадь сектора; Грегори назвал их сходящимися.

В заключение заметим, что Грегори, совершенно правильно оценивший исключительную важность в анализе операции предельного перехода, не подверг исследованию ее общие свойства. В стороне остались и свойства бесконечно малых, которые он применял в своем труде. К теории предельных переходов или бесконечно малых мы вернемся в связи с рассмотрением творчества Ньютона и Лейбница.

«Квадратура круга» Валлиса

Несколько ранее Грегори задача квадратуры круга привлекла внимание Валлиса, который нашел для числа $4/\pi$, обозначенного им $\square$, удивительное выражение в виде бесконечного произведения

$$\frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \dots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \dots}.$$

Это открытие, содержащееся в «Арифметике бесконечных» (Arithmetica infinitorum, Oxoniae, 1656) Валлиса, было сделано с помощью особого рода интерполирования последовательностей — вставки между их членами с целыми номерами промежуточных членов с дробными индексами. Самое слово interpolare (сглаживать, переделывать и т. п.) Валлис употребил в качестве математического термина впервые; иногда он пользовался также словом intercalare — «вставлять».

Важная часть «Арифметики» посвящена квадратуре кривых $y = x^n$. Как мы увидим, для натуральных значений n Валлис осуществил это с помощью сумм n -х степеней натуральных чисел, а полученный по неполной индукции результат распространил на дробные и рациональные значения показателя n (см. стр. 181). Уже здесь Валлис смело и уверенно применил наряду с неполной индукцией оригинальные интерполяции, которыми владел с беспримерным искусством. В еще более своеобразной форме он использовал оба приема в поисках, как он выражался, «истинной квадратуры круга в числах». Валлис поставил вопрос следующим образом. Площадь четверти круга $x^2 + y^2 = 1$ единичного радиуса выражается интегралом

$$\int_0^1 (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{\pi}{4},$$

который есть частный случай при $k = 2$ и $n = 1/2$ интеграла $\int_0^1 (1 - x^k)^n dx$.

Значение последнего интеграла при натуральных n и дробных положительных k Валлис нашел по неполной индукции

$$\int_0^1 (1 - x^k)^n dx = \frac{k \cdot 2k \cdot 3k \dots nk}{(k+1)(2k+1)(3k+1) \dots (nk+1)}.$$

Эта формула при $k = 2$ и $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ дает последовательность $1, \frac{2}{3}, \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}, \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}, \dots$ и задача состояла в подходящем выборе члена, промежуточного между 1 и $2/3$. Такая интерполяция не удавалась, и Валлис обратился к последовательности обратных значений интеграла

$1: \int_0^1 (1-x^2)^n dx$, соответствующих $n = 0, 1, 2, 3$ и т. д. Эту последовательность

$$1, \frac{1 \cdot 3}{2}, \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4}, \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \dots$$

Валлис назвал гипергеометрической, как и другие последовательности с общим членом Pa_n ($n = 0, 1, 2, \dots$), где множители a_n монотонно возрастают или убывают. Число $4/\pi$, которое Валлис далее обозначает $\square$, надлежало определить, как член, соответствующий $n = 1/2$, т. е. промежуточный член между 1 и $\frac{1 \cdot 3}{2}$. Однако и это интерполирование оказалось затруднительным и Валлис в конце концов обратился к интегралам вида $\int_0^1 (1-x^{1/p})^q dx$ и их обратным значениям, которые при натуральных p, q выражаются фигурными числами различных порядков¹ (ср. т. I, стр. 68), т. е. числами сочетаний

$$J(p, q) = 1: \int_0^1 (1-x^{1/p})^q dx = \frac{(p+1)(p+2)\dots(p+q)}{1 \cdot 2 \dots q} = \frac{(p+q)!}{p! q!} = C_{p+q}^p = C_{p+q}^q.$$

Число $\square$ нужно теперь вычислить, как значение при $p = 1/2$, $q = 1/2$, функции двух переменных, заданной сначала для целых неотрицательных аргументов, т. е. как $J(1/2, 1/2)$; что $0! = 1$ Валлису было ясно². Для функции $J(p, q)$ Валлис составил таблицы фигурных чисел и их обобщений на полуцелые p и q . Именно, выражение $J(p, q)$ при $p = 1/2$ есть

$$\frac{\left(\frac{1}{2} + q\right)!}{\frac{1}{2}! q!} = \frac{\left(\frac{1}{2} + q\right)\left(\frac{1}{2} + q - 1\right) \dots \frac{3}{2}}{q(q-1) \dots 2 \cdot 1},$$

так что при различных целых q получается

q	1	2	3	4
$\frac{\left(\frac{1}{2} + q\right)!}{\frac{1}{2}! q!}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4}$	$\frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6}$	$\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}$

¹ Фигурные числа первого порядка — это натуральные числа, т. е. C_n^1 , фигурные числа второго порядка — треугольные, т. е. C_n^2 , а третьего порядка — пирамидальные, т. е. C_n^3 . Вообще, фигурные числа k -го порядка суть суммы чисел $(k-1)$ -го порядка и равны C_n^k . Связь между фигурными числами и биномиальными коэффициентами знали Отред и Валлис; Б. Паскаль ее строго доказал.

² Обозначение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p = p!$ ввел в 1806 г. Хр. Крамп.

Далее, при различных полуцелых q

q	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
$\frac{\left(\frac{1}{2} + q\right)!}{\frac{1}{2}! q!}$	$\square$	$\frac{4}{3} \square$	$\frac{4.6}{3.5} \square$	$\frac{4.6.8}{3.5.7} \square$

Затем Валлис показывает, что если a_1, a_2, a_3 и a_4 — значения $\frac{\left(\frac{1}{2} + q\right)!}{\frac{1}{2}! q!}$ при четырех последовательных значениях q , то $\frac{a_2}{a_1} > \frac{a_3}{a_2} > \frac{a_4}{a_3}$, откуда следует, что $\sqrt{\frac{a_3}{a_1}} > \frac{a_3}{a_2} > \sqrt{\frac{a_4}{a_2}}$. Применяя эти последние неравенства для $q = \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4$, Валлис получил, что

$$\sqrt{\frac{4.6.8}{3.5.7} : \frac{4.6}{3.5}} > \frac{4.6.8}{3.5.7} \square : \frac{3.5.7}{2.4.6} > \sqrt{\frac{3.5.7.9}{2.4.6.8} : \frac{3.5.7}{2.4.6}},$$

т. е.

$$\frac{3.3.5.5.7.7}{2.4.4.6.6.8} \sqrt{\frac{8}{7}} > \square > \frac{3.3.5.5.7.7}{2.4.4.6.6.8} \sqrt{\frac{9}{8}}.$$

Из аналогичных неравенств для сколь угодно больших значений q Валлис и получал

$$\square = \frac{4}{\pi} = \frac{3.3.5.5.7.7.9.9...}{2.4.4.6.6.8.8.10...},$$

причем доказал, что при бесконечном продолжении действий разность между верхней и нижней границами для искомой величины становится меньше любой заданной величины и «наконец совершенно исчезнет».

Само значение $\square$ Валлис считал отличным от всех ранее употреблявшихся иррациональностей, — потому он и обозначил его новым символом. Это было, кажется, первое явное указание на трансцендентную природу числа π .

Чем же руководствовался Валлис при выборе своей интерполяции? Ведь в принципе подбор промежуточного члена его гипергеометрического ряда мог быть осуществлен многими способами. Руководящими в исследовании были, вероятно, следующие обнаруженные им свойства функции двух целых аргументов $J(p, q)$:

I. $J(p, 0) = 1$.

II. Мультипликативное свойство

$$J(p, q+1) = \frac{p+q+1}{q+1} J(p, q).$$

III. Симметрия

$$J(p, q) = J(q, p)$$

и еще оценка для полуцелого q

$$\text{IV. } \frac{J\left(p, q + \frac{1}{2}\right)}{J(p, q)} > \frac{J(p, q+1)}{J\left(p, q + \frac{1}{2}\right)}.$$

В частности, свойство IV позволило однозначно определить путем предельного перехода значение $J(1/2, 1/2) = \square$.

Еще до вывода «Арифметики бесконечных» Валлис сообщил найденное им значение для $\square$ и гипергеометрический ряд Броункеру, поставив при этом вопрос о других удобных выражениях этой величины. Броункер в ответ сообщил изящное представление $\square$ в форме бесконечной непрерывной дроби, не приводя, однако, вывода:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{9}{2 + \frac{25}{2 + \frac{49}{2 + \dots}}}}$$

Несомненно влияние «Арифметики бесконечных» на младших современников ее автора, как Дж. Грегори и особенно Ньютона, который в своих первых исследованиях по теории рядов применил как неполную индукцию, так и интерполяции в духе Валлиса. Через 75 лет после выхода это сочинение сыграло выдающуюся роль в создании Эйлером теории бета- и гамма-функций. Заметим, что изучавшийся Валлисом интеграл $\int_0^1 (1-x^{1/q})^p dx$ при

подстановке $x = y^q$ преобразуется в интеграл $q \int_0^1 (1-y)^p y^{q-1} dy = qB(q, p+1)$.

Впрочем, как мы увидим (т. III, гл. 7), Эйлер обратил прием Валлиса, выражая общие члены последовательностей с помощью определенных интегралов, а не разыскивая значение определенного интеграла с помощью интерполяционного вычисления промежуточных членов последовательностей.

Интерполяционные формулы Бригса и Дж. Грегори

Как мы уже знаем, в начале XVII в. были табулированы тригонометрические и логарифмическая функции, а также $\log \sin x$ с точностью до семи и даже большего числа десятичных знаков для довольно плотного множества значений аргумента. При такого рода вычислениях широко применялась известная с древности линейная интерполяция: значения функции $f(x)$ в промежутке между какими-либо двумя значениями аргумента $x, x+h$, скажем при аргументе $x+\lambda h, 0 < \lambda < 1$, находили, как

$$f(x+\lambda h) = f(x) + \lambda [f(x+h) - f(x)].$$

Если разделить промежуток $(x, x+h)$ на n равных частей Δx , то значения функции в точках деления, вычисленные по этому правилу, будут равно-

отстоящими, подобно значениям аргумента. Другими словами, первая разность функции при этом постоянна. Напомним, что первой разностью $f(x)$ при $x = X$ называется $\Delta f(X) = f(X + \Delta x) - f(X)$, здесь X может принимать значения $x + n\Delta x$ ($n = 0, 1, 2, \dots, m-1$). То, что ошибка при линейном интерполировании во многих вычислениях была допустимо малой, объяснялось достаточной гладкостью соответствующих функций, обращавшихся в бесконечность разве что на границе рассматриваемого промежутка.

Однако линейная интерполяция оказывалась достаточной не всегда, это обнаруживалось при непостоянстве первой разности. Но в этих случаях постоянной могла быть разность первой разности, или вторая разность $\Delta^2 f(X) = \Delta f(X + \Delta x) - \Delta f(X)$, или же третья разность $\Delta^3 f(X) = \Delta^2 f(X + \Delta x) - \Delta^2 f(X)$, вообще какая-либо разность n -го порядка, определяемая рекуррентным соотношением

$$\Delta^n f(X) = \Delta^{n-1} f(X + \Delta x) - \Delta^{n-1} f(X).$$

По разностям высших порядков можно последовательно найти низшие разности и в конце концов сами искомые значения функции. Когда математики заметили, что ошибку можно значительно уменьшить, используя разности выше первого порядка, они приступили к разработке теории интерполирования и вместе с тем теории конечных разностей. Здесь и далее мы пользуемся современным обозначением разностей, введенным Л. Эйлером (1755).

Впервые более глубоко в этот мир интерполирования разностями высших порядков проник Бригс, заложивший в своей «Логарифмической арифметике» (1624) основы интерполяционной техники. При составлении своих таблиц он вычислял значения встречающихся ему разностей высших порядков до тех пор, пока эти разности не становились (в пределах взятого им количества знаков) равными между собой. Как было установлено Ньютоном, функции, разности n -х порядков которых постоянны, являются многочленами n -й степени¹. Таким образом, Бригс фактически начал работы по приближению функций многочленами или, как тогда говорили, параболami высших порядков, хотя в то время эта сторона его методов осталась совершенно нераскрытой.

Чтобы найти, скажем, десятичный логарифм 6, Бригс образует тождество $9 \log 6 - 7 \log 10 = \log 1,0077696$, приводя тем самым задачу к вычислению логарифма числа λ , близкого к единице. Затем он вставляет между 1 и λ большое число средних пропорциональных с помощью многократного извлечения квадратного корня:

$$\frac{1}{k} = \frac{k}{k^2} = \frac{k^2}{k^3} = \dots = \frac{k^{n-1}}{\lambda},$$

где $k = \sqrt[n]{\lambda}$ и n есть некоторая степень числа 2. Именно, он вычисляет значения $k = \sqrt[2^i]{\lambda} = \lambda^{2^{-i}}$ для $i = 1, 2, 3, \dots, 11$ и значения $k - 1 = e_0$, $k^2 - 1 = e_1, \dots$ до $k^{256} - 1 = e_8 = 0,0077696 = \lambda$. Составляя по этим значениям e_i таблицы последовательных разностей, Бригс заметил связывающие эти разности рекуррентные соотношения, а также установил, что высшие разности неограниченно уменьшаются.

¹ Впрочем, еще И. Фаульгабер (1631) отметил постоянство $\Delta^n(x^n)$ для $n = 20$.

Обращая процесс, т. е. переходя от высших разностей к низшим, он, наконец, пришел к следующему замечательному результату: если обозначить $k = 1 + \alpha$, где α — весьма малая дробь, то

$$(1 + \alpha)^{\frac{1}{2}} - 1 = \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{8} \alpha^2 + \frac{1}{16} \alpha^3 - \frac{5}{128} \alpha^4 + \frac{7}{256} \alpha^5 + \dots$$

В глазах самого Бригса это разложение было только техническим приемом, позволяющим усовершенствовать технику вычисления логарифмов, и он не обнаружил закона образования коэффициентов. Все же фактически Бригс впервые вывел начальные члены разложения степени бинома в случае дробного показателя, равного половине, и при желании число членов можно было неопределенно увеличить. Трудно сказать, в какой мере идеи Бригса, изложенные им весьма пространно, но неясно, повлияли на дальнейшую разработку всего этого круга проблем. Среди немногих читателей пояснительного текста «Логарифмической арифметики» был Дж. Грегори, но Ньютон, которому принадлежит первое открытие разложения $(1 + \alpha)^n$ для любого действительного n , с идеями Бригса знаком, по-видимому, не был.

Дж. Грегори продвинулся в области интерполирования гораздо дальше Бригса. В «Геометрических этюдах» (1668) он предложил способ интерполирования для случая постоянной разности второго порядка, равносильный замене данной функции квадратичным многочленом $y = ax^2 + bx + c$. В применении к приближенной квадратуре кривых это дало ему правило, равносильное так называемой формуле Т. Симпсона (1743). Грегори упомянул здесь и о возможности распространения приема на параболы высшего порядка. Однако свой основной результат в теории интерполирования Грегори изложил только в письме к Коллинсу от 23 ноября 1670 г. Речь идет об общей формуле интерполирования с равноотстоящими узлами, в которой функция, заданная своими значениями в $n + 1$ точке с равноотстоящими абсциссами $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots, x_0 + nh = X$, заменяется параболой n -го порядка, проходящей через эти точки:

$$f(x_0 + xh) = f(x_0) + \frac{x}{1} \Delta f(x_0) + \frac{x(x-1)}{2!} \Delta^2 f(x_0) + \dots \\ \dots + \frac{x(x-1)(x-2) \dots 2 \cdot 1}{n!} \Delta^n f(x_0).$$

Мы упоминали, что приемы, соответствующие $n = 2$ и $n = 3$, употреблялись ранее китайскими астрономами (т. I, стр. 174).

Не позднее середины 70-х годов та же формула была известна Ньютону; в настоящее время она обычно называется формулой Ньютона для интерполирования вперед, так как в нее входят значения функции вправо от $f(x_0)$ и ее чаще применяют в окрестности начала ряда табличных значений. В «Методѣ разностей», написанном около 1675 г. (Methodus differentialis, Londini, 1711), Ньютон, кроме этой формулы, дал еще формулу для интерполирования назад, в которую входят значения функции влево от $f(x)$ и которая особенно удобна в конце таблицы. Но главным вкладом Ньютона явился вывод интерполяционного параболического многочлена в случае неравноотстоящих углов с помощью так называемых (по предложению А. де Моргана, 1842) разделенных разностей. Этот результат, как и первую формулу для равноотстоящих углов, Ньютон опубликовал еще в V лемме III книги «Математических начал натуральной философии» (1687) в

связи с рассмотрением вопроса об орбитах комет. В «следствии» к этой лемме Ньютон особо отмечал, что его формулы позволяют приближенно вычислять площади любых кривых через площади парабол высших порядков.

Интерполяционные вычисления и формулы сыграли огромную роль в развитии новых математических методов. С одной стороны, они позволяли свести к числовому расчету множество задач, беспредельно расширяли прикладные возможности математики, а с другой, — приводили к новым квадратурам и разложениям в ряды, раскрывая тем самым новые теоретические просторы. Очень ярко эта роль интерполяций видна в творчестве Ньютона; не без ее влияния, в частности, Ньютон пришел к мысли об определяющей роли степенных рядов в его теории флюксий.

Логарифмы и бесконечные ряды

Приближенные вычисления и интерполирование явились той почвой, на которой выросла теория бесконечных рядов — одно из самых значительных созданий XVII в. Нам пришлось уже несколько раз говорить о суммировании бесконечных рядов, преимущественно геометрических прогрессий. Принципиально новым явилось употребление бесконечных рядов для приближения и выражения функций. В этом отношении особую роль сыграли логарифмы, и их пример — исторически первый — представляет собой превосходную иллюстрацию тех взаимодействий между вычислениями и общей теорией, которые были одной из непосредственных причин математического прогресса на протяжении всего Нового времени.

Как сказано, Григорий Сен Венса (1647) и в более явной форме де Сараса (1649) отметили связь площади, ограниченной гиперболой, ее асимптотой и двумя сопряженными ординатами, с логарифмами. Численно, и притом в форме бесконечного ряда, эту связь выразил не позднее 1657 г. В. Брункер, опубликовавший свой результат

$$\ln 2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots$$

в статье «Квадратура гиперболы с помощью бесконечного ряда рациональных чисел» (*The squaring of the Hyperbola by an infinite series of rational numbers. Philos. Trans., 1668*).

Впрочем, в публикации этого разложения его опередил итальянский математик, последователь Кавальери и профессор математики в Болонье, Пьетро Менголи (1625—1686). Труды Менголи в теории рядов заслуживают очень высокой оценки, хотя и не привлекли, отчасти из-за трудного изложения, должного внимания большинства современников. Дж. Грегори они были все же известны.

В «Новых арифметических квадратурах или о сложении дробей» (*Novae quadraturae arithmeticae seu de additione fractionum, Bononiae, 1650*) Менголи просуммировал некоторые числовые ряды вроде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(n+k)} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

и независимо от Орема (т. I, стр. 281) доказал расходимость гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, применяя неравенство¹

$$\frac{1}{3k-1} + \frac{1}{3k} + \frac{1}{3k+1} > \frac{1}{k}.$$

Этот результат Менголи распространил на обобщенные гармонические ряды², члены которых обратны членам арифметической прогрессии, т. е.

ряды $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a+kb}$. Частные суммы гармонического ряда, как мы увидим

несколько далее, он применил к изучению логарифмов. Менголи пытался исследовать и ряд обратных квадратов $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Он доказал его сходимость,

но суммирование ему, естественно, не удалось, и он выразил сомнение в возможности произвести его в конечной форме³. Впоследствии этот и более общие ряды обратных степеней были глубоко изучены Эйлером (см. т. III). Числовой ряд для $\ln 2$ Менголи привел в «Началах видовой геометрии» (*Geometriae speciosae elementa*, Bononiae, 1659), в которой среди прочего произвел квадратуру кривых $y = x^p (1-x)^q$ для натуральных p и q , т. е. вычислил интеграл

$$\int_0^1 x^p (1-x)^q dx = \frac{1}{p+q+1} : C_{p+q}^p.$$

Прием вычисления $\ln 2$, предложенный Броункером, прост и изящен. Рассматривая площадь между гиперболой $xy = 1$, асимптотой и ординатами точек $E(1, 1)$ и $C(2, \frac{1}{2})$, а также описанный около этой фигуры квадрат (рис. 24), Броункер делил отрезок AB на 2, 4, 8, 16, ... равных частей и, проведя через соответствующие точки кривой отрезки, параллельные сторонам квадрата, подсчитывал площади возникающих при этом прямоугольников, из которых одни вписаны в фигуру $EDCE$, а другие — в фигуру $ABCEA$:

$$\text{пл. } bD = \frac{1}{2 \cdot 3}, \text{ пл. } ad = \frac{1}{4 \cdot 5}, \text{ пл. } ce = \frac{1}{6 \cdot 7}, \dots,$$

$$\text{пл. } AC = \frac{1}{1 \cdot 2}, \text{ пл. } bf = \frac{1}{3 \cdot 4}, \text{ пл. } ag = \frac{1}{5 \cdot 6}, \dots$$

¹ Сначала, полагая $k = 1$, Менголи находит, что $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$; затем он берет 3^2 членов с $1/5$ до $1/13$, группируя их по три, и находит, что сумма их в силу предыдущего также больше 1; далее аналогично оценивается сумма следующих 3^3 членов и т. д.

² Термин «гармонический ряд» ввел Броункер (1668) в связи с тем, что три его последовательных члена $1/[a + (k-1)b]$, $1/(a + kb)$, $1/[a + (k+1)b]$, образуют гармоническую пропорцию.

³ Я. Бернулли, очевидно, незнакомый с результатами Менголи, привел в своих «Арифметических предложениях о бесконечных рядах и их конечной сумме» (*Propositiones arithmeticae de seriebus infinitis eorumque summa finita*, Basileae, 1689—1704) два новых доказательства расходимости гармонического ряда: одно собственное, другое принадлежащее его брату Иоганну, обнаружившему этот факт первым. Подобно Менголи, Я. Бернулли безуспешно пытался просуммировать ряд обратных квадратов

т. е. в сущности как общий предел гиперлогарифма и гипологарифма при $r \rightarrow \infty$. Очевидно, что такое определение вытекало из сравнения площади гиперболы $xy = 1$ между ординатами точек $x = rn$ и $x = rm$ с площадями ступенчатых вписанных и описанных фигур; мы бы сказали теперь: с нижней и верхней суммами функции $y = 1/x$. Аналогичные нижние и верхние суммы Менголи применял и при вычислении квадратур $y = x^p(1 - x)^q$.

Любопытно, что к основным неравенствам Менголи на двадцать лет раньше пришел из других соображений и — для других целей — Декарт (см. стр. 164). Все свойства логарифма Менголи выводит из этого аналитического определения. Из него же он получает разложение

$$\log \frac{m}{n} = \sum_{r=1}^{\infty} [P(m)_r - P(n)_r],$$

где

$$P(m)_r = \sum_{s=1}^m \frac{1}{(r-1)m + s};$$

ряд Броункера для $\ln 2$ отсюда получается при $m = 2$, $n = 1$ и притом в более привычной теперь форме

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Разложение $\ln(1+x)$ в степенной ряд

Следующим шагом в исследовании логарифмической функции явилось ее представление в форме бесконечного степенного ряда. Этот важный шаг сделал проживавший в то время в Лондоне немецкий любитель математики, член Королевского общества Николай Кауфман (1620—1687) более известный под именем Меркатора (латинское mercator — как и немецкое Kaufman — купец). Свое исследование Меркатор опубликовал в «Логарифмотехнике» (Logarithmotechnia, Londini, 1668) почти одновременно с появлением статьи Броункера. Но два эти труда, посвященные одной цели — вычислению логарифмов, резко отличались по методу. Уступая Броункеру в строгости изложения, Меркатор значительно превзошел его в общности приема и результата. Счастливым образом перейдя от равноудаленной гиперболы $y = 1/x$, отнесенной к обеим асимптотам, к смещенной гиперболы $y = 1/(1+x)$, он применил к дроби $1/(1+x)$ обычное деление по правилам алгебры, продолжающееся в данном случае без конца

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

Затем почленным интегрированием (квadrатуры кривых $y = x^n$ были ему известны по труду Валлиса, см. стр. 181) он нашел, что

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots;$$

результат Броункера при этом тотчас получался при $x = 1$. Правда, Меркатор не выписал еще ряд в общем виде, а только для значений аргумента $x = 0,1$ и $x = 0,21$, но поскольку в той же работе он произвел еще вычисление «суммы логарифмов», т. е.

$$\int_0^x \ln(1+x) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} - \dots$$

для $x = 0,1$, то ясно, что он в обоих случаях владел общим разложением. Так это и было воспринято современниками. Вопросы о сходимости Меркатор совершенно не затронул.

Меркатор не первый пришел к разложению логарифмической функции в степенной ряд. К тому же результату пришли Гудде в 1656 г. и Ньютон в 1665 г., но оба хранили его при себе. Значение публикации «Логарифмотехники» оказалось поэтому очень велико. Валлис откликнулся рецензией в «Philosophical Transactions» еще в том же 1668 г. Выразив восхищение открытием Меркатора, он указал, что пользоваться рядом при $x > 1$ нельзя, и одновременно дал разложение

$$\ln \frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

В том же 1668 г. Грегори в «Геометрических этюдах» предложил вывод ряда Меркатора в античной манере и разложение

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right),$$

пригодное для вычисления логарифма любого положительного числа $z = (1+x)/(1-x)$, ибо тогда $x = (z-1)/(z+1)$ по абсолютной величине меньше единицы.

Интересен вывод логарифмического ряда с помощью общей формулы бинома Ньютона (см. стр. 228), предложенный Галлеем (в «Philosophical Transactions» за 1695 г.). Пусть $\log(1+x)$ при основании a есть m/n , т. е. $a^{m/n} = 1+x$ или $a^{1/n} = (1+x)^{1/m}$. Фиксируя m/n и считая n (и следовательно, m) сколь угодно большим числом, Галлей представил разность $a^{1/n} - 1$ в виде k/n , где $k = \text{const}$, так что

$$a^{1/n} = 1 + \frac{k}{n}.$$

В таком случае для $\log(1+x)$ получается выражение, в сущности известное ранее Бригсу (стр. 68):

$$\log(1+x) = \frac{m}{k} [(1+x)^{1/m} - 1].$$

Раскладывая правую часть в бесконечный ряд и заменяя произведения вида $\left(\frac{1}{m} - 1\right)\left(\frac{1}{m} - 2\right) \dots \left(\frac{1}{m} - r\right)$ на $(-1)^r r!$, Галлей получил ряд Меркатора

$$\log(1+x) = \frac{1}{k} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \right),$$

а для десятичных логарифмов привел значения $k = 2,302585\dots$ и $1/k = 0,434299\dots$ с 60 десятичными знаками. Эти и некоторые другие подсче-

ты произвел, вероятно, астроном Абрахам Шарп (1651—1742). Аналогично, отправляясь от равенства

$$1+x = \left[1 + \frac{k}{m} \log(1+x)\right]^m,$$

Галлей при очень большом m вывел разложение показательной функции

$$1+x = 1+y + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \dots,$$

где $y = k \log(1+x)$ (ср. стр. 232). Этот метод впоследствии встречается у Эйлера (см. т. III, гл. 7).

Таким образом, логарифм, введенный Непером кинематически и как табулированное решение дифференциального уравнения типа $dy = adx/x$, через немногие десятилетия перевоплотился в геометрический образ площади под гиперболой, а затем был аналитически выражен в форме степенного ряда.

Любопытно, что и Декарту пришлось встретиться с логарифмической функцией, и притом дважды. Занимаясь одной задачей механики, он исследовал кривую, обладающую в полярных координатах тем свойством, что угол α радиус-вектора с касательной в его конце постоянен. Отсюда он вывел, что длина дуги s , считая от полюса, пропорциональна радиус-вектору ρ . Об этой кривой он писал 12 сентября 1638 г. Мерсенну¹. Как решил Декарт эту задачу — одну из первых обратных задач на касательные, в которых требуется найти кривую по данному свойству касательной, — неизвестно. Скорее всего, он воспользовался характеристическим бесконечно малым прямоугольным треугольником со сторонами ds , $d\rho$, $\rho d\varphi$, в данном примере дающим $ds = \sec \alpha d\rho$, так что $s = \sec \alpha \cdot \rho$ (ибо $s = 0$ при $\rho = 0$). Если бы Декарт пожелал найти зависимость между ρ и φ , т. е. полярное уравнение кривой, то он бы встретился с «уравнением Непера» $d\varphi = (\operatorname{tg} \alpha \cdot d\rho)/\rho$. К этому уравнению, выраженному в кинематических терминах, пришел Валлис, не отметивший, впрочем, как и Декарт, логарифмической зависимости между φ и ρ . Той же кривой занимались Э. Торричелли и позднее Я. Бернулли, а Лопиталь назвал ее логарифмической спиралью².

В то же время Декарт уже подошел вплотную к «уравнению Непера», решая другую знаменитую обратную задачу на касательные, поставленную перед ним Дебоном: определить кривую, у которой отношение подкасательной к ординате равно отношению данной линии к разности абсциссы и ординаты. Мы можем записать это условие уравнением $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{b}$. Уверенный, что общего приема точного решения таких задач не существует, Декарт сначала перебрал в поисках требуемой линии множество алгебраических кривых. Не добившись успеха на этом пути, он построил искомую линию приближенно. Перейдя к некоторой другой системе косоугольных координат, он установил, что в ней эта линия имеет постоянную

¹ Письмо это было опубликовано в 1657 г.

² В письмах 1645—1647 гг. Торричелли произвел независимо от Декарта спрямление и квадратуру этой спирали, кинематически определив ее свойством, которое можно записать нашими уравнениями $\varphi = kt$, $\rho = a^{-t}$; при этом он ясно описал, как кривая асимптотически приближается к полюсу, совершая вокруг него бесконечное множество оборотов.

подкасательную, именно $dx' = -\frac{\sqrt{2} b dy'}{y'}$, и, численно решая задачу, пришел к тем неравенствам, которыми определял логарифм Менголи (см. стр. 161):

$$\sum_{i=n+1}^m \frac{1}{i} < \sum_{i=n+1}^m \Delta x_i < \sum_{i=n+1}^m \frac{1}{i-1};$$

при этом Декарт отметил, что разность левой и правой границ $\frac{1}{n} - \frac{1}{m}$ можно, увеличивая n и m , сделать сколь угодно малой, а точки кривой строить с любой точностью. Наконец, Декарт приводит кинематический способ описания искомой кривой с помощью пересечения двух движущихся прямых, причем закон движения определяется аналогично неперову определению логарифмов. Впрочем, о логарифмах Декарт при изложении своего решения (в письме Дебону 20 февраля 1639 г.) не упомянул ни словом и далее в этом направлении не продвинулся. Менголи о решении Декарта почти несомненно не знал.

Связь гармонических рядов с логарифмами побуждала к их более подробному изучению и привела к рассмотрению асимптотических сумм. Это сделал все в те же годы Ньютон, изложивший свои результаты в письмах к Коллинсу от января 1669 г. и 20 июля 1671 г.

Функция $f(x)$ называется асимптотически представимой функцией $\varphi(x)$ при $x \rightarrow x_0$ (в частности, $x \rightarrow \infty$), если при этом $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \rightarrow 1$, или, что то же, $\frac{f(x) - \varphi(x)}{\varphi(x)} \rightarrow 0$, т. е. разность между обеими функциями бесконечно мала относительно функции сравнения $\varphi(x)$. Говорят также об асимптотическом равенстве $f(x) \sim \varphi(x)$. Например, $1 - \cos x \sim x^2/2$ при $x \rightarrow 0$, а $\frac{x^2}{2} + x \sim \frac{x^2}{2}$ при $x \rightarrow \infty$. Функция $f(x)$ называется асимптотически

разложимой при $x \rightarrow x_0$ (в частности, $x \rightarrow \infty$) в бесконечный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)$, если при этом

$$\frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(x)}{\varphi_n(x)} \rightarrow 1,$$

или, что то же,

$$\frac{f(x) - \sum_{k=0}^n \varphi_k(x)}{\varphi_n(x)} \rightarrow 0,$$

т. е. разность между функцией и частной суммой ряда бесконечно мала относительно последнего члена суммы. Всякая функция асимптотически разложима в сходящийся к ней ряд Тейлора, но асимптотический ряд для данной функции может быть и расходящимся. Это не мешает использованию — при надлежащей осторожности — асимптотических расходящихся рядов для исследования и приближения функций.

Ньютон специально исследовал поставленный перед ним Коллинсом вопрос о вычислении частных сумм общего гармонического ряда $\sum \frac{1}{a + kb}$.

Разлагая каждый член такой суммы, записанный в виде $\frac{1}{a} \frac{1}{1 + \frac{kb}{a}}$.

в геометрическую прогрессию до некоторого ее места, он получил

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{a + kb} = \frac{1}{a} \sum_{i=0}^n (-1)^i \left(\frac{b}{a}\right)^i S^{(i)}(n),$$

где $S^{(i)}_n$ — сумма i -х степеней натуральных чисел $1, 2, \dots, n$. При возрастании числа n до бесконечности такие суммы, вообще говоря, расходятся. Вместе с тем для каждого n можно подобрать такое N , что разность

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{a + kb} - \frac{1}{a} \sum_{i=0}^N (-1)^i \left(\frac{b}{a}\right)^i S^{(i)}(N)$$

будет достаточно мала. Хотя точность приближения не может быть увеличена для данных a, b и N , но совершаемая погрешность при взятии «усеченного» ряда может быть точно вычислена. Сам Ньютон показал на числовых примерах, как вести выкладки, чтобы получить при заданном числе членов приближение с ошибкой, не превышающей данного числа.

Асимптотические представления стали чрезвычайно ценным средством исследований и вычислений в XVIII в., особенно благодаря Стирлингу и Эйлеру; их успешно применяли затем Лагранж, Лежандр и Лаплас. Строгая теория вопроса была разработана только в XIX в.

Открытия Грегори

На примере логарифмической функции мы познакомились с первыми успехами теории рядов и вместе с тем увидели, какими принципами руководствовались математики в этой области. Когда речь шла о приближенном вычислении отдельной конкретной величины, принимали во внимание сходимость к ней ряда и искали оценки аппроксимации. Здесь дело было не только и, пожалуй, не столько в античной традиции строгости, сколько в существовании расчетных задач и возможности установления соответствующих неравенств. По когда переходили к операциям над буквенными рядами, то на них, как правило, не задумываясь, переносили приемы действий над конечными алгебраическими многочленами. Поскольку фактически оперировали функциями, аналитическими внутри соответствующего промежутка, такое оперирование бесконечными степенными рядами обыкновенно не приводило к ошибкам. В этих условиях еще отсутствовали реальные стимулы к постановке общих проблем теории сходимости и к изучению рядов как самостоятельных объектов анализа; исключения были редкостью (стр. 255). В результате при выводе и даже проверке степенных разложений (стр. 230), как и при манипулировании ими, часто применяли формальные приемы, получившие еще большее развитие в XVIII в. Сказанное относится и к другим процессам бесконечного приближения.

Разложение в ряд логарифма было не единственным примером употребления степенных рядов. Многочисленные другие разложения открыл Дж. Грегори. Из его письма к Коллинсу 23 ноября 1670 г. (стр. 157) видно, что в это время он владел уже общим разложением бинома $(1 + x)^{p/q}$, а к

началу 1672 г. вывел еще несколько важных разложений, которые мы запишем в современной форме:

$$1^{\circ}. \quad \varphi = \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \varphi + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 \varphi - \dots$$

Ряд для арктангенса Грегори, вероятно, получил почленным интегрированием ряда, возникающего при делении $1:(1+x^2)$, где $x = \operatorname{tg} \varphi$.

$$2^{\circ}. \quad \operatorname{tg} \varphi = \varphi + \frac{\varphi^3}{3} + \frac{2\varphi^5}{15} + \dots$$

$$3^{\circ}. \quad \ln \sec \varphi = \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{12} + \frac{\varphi^6}{90} + \dots$$

Последний результат был, скорее всего, найден интегрированием членов предыдущего ряда

$$4^{\circ}. \quad \sec \varphi = 1 + \frac{\varphi^2}{2} + \frac{5\varphi^4}{24} + \dots$$

$$5^{\circ}. \quad \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \varphi + \frac{\varphi^3}{6} + \frac{\varphi^5}{24} + \dots$$

Данный ряд также возникает при интегрировании предыдущего.

Все эти и некоторые другие разложения приведены в письме к Коллинсу от 15 февраля 1672 г. Можно предполагать, что в это время Грегори владел и гораздо более общим результатом — разложением в ряд Тейлора — Маклорена, хотя прямого свидетельства о том не существует. Весьма правдоподобно, что разложения для $\operatorname{tg} \varphi$ и $\sec \varphi$ он вывел с помощью последовательного дифференцирования.

Однако только что перечисленные открытия Грегори не оказали существенного влияния на развитие математического анализа. О наиболее важном из них (если оно действительно было им произведено), т. е. ряде Тейлора, никто не мог в ту пору и подозревать: о нем заключили по рукописному наследию Грегори лишь исследователи XX в.¹ А между тем еще в 1665—1669 гг. далеко продвинулся в теории рядов начиная с открытия той же теоремы о биноме, Ньютон, результаты которого начали получать распространение не позднее конца 1669 г. как в Англии, так и за границей. О работах в этой области Ньютона, а также Лейбница (с 1673 г.) мы расскажем далее. Теперь же мы обратимся к развитию в XVII в. новых интегральных и дифференциальных методов.

Инфинитезимальные методы Кеплера

Первый решительный разрыв с античными формами квадратур и кубатур совершил Кеплер, ярко обнаживший лежащие в их основе оперирования неограниченно возрастающими по числу суммами беспрельдно малых величин и вновь доказавший на многочисленных примерах эвристическую ценность метода неделимых, который он, можно сказать, между строк вычитал в творениях Архимеда².

¹ Ряд Тейлора — Маклорена Грегори мог бы вывести путем предельного перехода из своей интерполяционной формулы (стр. 157) так, как это сделал впоследствии сам Тейлор.

² С этим методом Кеплер мог в какой-то мере познакомиться по известному ему «Математическому сборнику» Паппа.

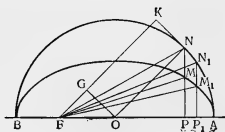


Рис. 22

Квадратуры играли решающую роль в астрономических исследованиях Кеплера. Вот как он сам высказал второй закон движения планет в своей «Новой астрономии» (1609): время движения планеты от конца большой оси до произвольного места на орбите относится ко времени полного оборота, как «сумма радиус-векторов», проведенных из фокуса, в котором находится Солнце, в точки пройденной дуги, относится к «сумме радиус-векторов» всего эллипса. Кеплер говорил о сумме радиус-векторов сектора там, где мы говорим о его площади. Это не значит, что он отождествлял эти понятия. Такой оборот речи имел другое содержание: отношение площадей выражается через отношение сумм неограниченно большого количества радиус-векторов, принадлежащих этим площадям, — мы бы сказали — через предел такого отношения. Однако величина отношения зависит от того, как выбрать эти радиус-векторы, или, что то же, точки дуг, к которым они проведены. Такой выбор, соответствующий нашему выбору аргумента интегрирования при интегрировании функции, выражающей радиус-вектор, представлял основную трудность. Ее вполне оценил еще Кавальери, в предисловии к своему главному труду писавший: «Всякий, кто видел трактат упомянутого Кеплера о движении Марса, может легко убедиться на основании наших исследований, как легко ему было впасть в ошибку..., исходя из предположения, что площадь эллипса равновелика совокупности всех расстояний планеты, вращающейся по эллиптической линии, от Солнца»¹.

Свое вычисление, т. е. приближенное интегрирование, Кеплер произвел следующим образом. Он строит на большой оси эллипса, как на диаметре, окружность и рассматривает радиус-векторы тех точек эллипса, которые являются проекциями в направлении малой оси точек окружности, находящихся на равных дуговых расстояниях. В самом деле, пусть точка M эллипса является проекцией точки N окружности (рис. 22); тогда фокальный радиус-вектор FM точки M , как известно, равен $a + ex$, где $a = OA$ — большая полуось эллипса, т. е. радиус круга, $x = OP$ — абсцисса точек M и N , $e = c/a$ — эксцентриситет эллипса, т. е. отношение фокусного расстояния OF к OA . Проведем из фокуса F параллельно радиусу ON прямую FK до пересечения в точке K с касательной к окружности в точке N и опустим перпендикуляр OG из центра O на линию FK . Тогда из подобия треугольников OGF и ONP следует, что

$$\frac{FG}{OF} = \frac{OP}{ON}, \text{ т. е. } FG = \frac{OF}{ON} OP = \frac{c}{a} x = ex,$$

¹ Б. Кавальери. Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного. Перевод, вступительная статья и комментарии С. Я. Лурье. М. — Л., 1940, стр. 94.

и так как $GK = ON = a$, то линия $FK = FG + GK$ равна линии $FM = a + ex$. Если точка N_1 близка к точке N , то фигура NFN_1 мало отличается от треугольника, ограниченного лучами FN, FN_1 и касательной NK ; поэтому площадь фигуры NFN_1 мало отличается от половины произведения $FM = FK$ на дугу NN_1 или от половины произведения FM_1 на дугу NN_1 . Поэтому если мы разделим дугу окружности AN на равные части точками $N_1, N_2, \dots, N_n$, то площади фигур MFN_i ($i = 1, 2, \dots, n$) пропорциональны площадям NFN_i , которые мало отличаются от половины сумм произведений FM_i на дугу $NN_1 = N_1N_2 = \dots = N_{n-1}N_n$, т. е. площади MFN_i почти пропорциональны суммам радиус-векторов $FM_1, FM_2, \dots, FM_i$, если точки эллипса $M_1, M_2, \dots, M_n$ построены указанным способом. Кеплер действительно складывал радиус-векторы выбранных таким образом точек и вычислял отношения таких сумм.

Иными словами, если обозначить угол AON , так называемую эксцентрическую аномалию, буквой ψ , то Кеплер приближенно вычисляет интегралы вида $\int_0^\psi r d\psi$ и устанавливает пропорциональность между време-

нем t и значением этого интеграла. Если ввести еще полярный угол AFM или истинную аномалию φ , то результат Кеплера можно аналитически передать следующим образом. Радиус-вектор $r = a + ex = a + c \cos \psi$, а

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{c+x} = \frac{b \sin \psi}{c+a \cos \psi},$$

где $y = PM$, b — малая полуось; поэтому (C — коэффициент пропорциональности)

$$Ct = \int_0^\varphi r^2 d\varphi = \int_0^\psi br d\psi = b(a\psi + c \sin \psi),$$

где первый интеграл выражает, если его поделить на 2, площадь в полярных координатах. Кроме того, если обозначить $C/ba = k$, то

$$kt = \psi + e \sin \psi,$$

и это уравнение служит Кеплеру для определения положения планеты в данный момент времени. Мы видели, что «уравнение Кеплера» приходилось приближенно решать в другой связи еще багдадским астрономам IX в. (т. I, стр. 237). Сам Кеплер выразил сначала это уравнение геометрической задачей, вытекающей из его второго закона: из точки, лежащей на диаметре круга, провести прямую, делящую площадь полукруга в данном отношении. Прямое, неприведенное решение задачи он считал невозможным в силу разнородности углов и синусов.

Упомянем в этой связи, что, сравнивая между собой суммы синусов углов, взятых через один градус, от 1° до φ° для нескольких значений φ , Кеплер установил равенство, которое в наших обозначениях имеет вид

$$\int_0^\varphi \sin x dx = 1 - \cos \varphi.$$

Позднее Кеплер узнал, как доказывается этот результат на основе строгих методов Архимеда, который пришел к тому же по существу выводу при измерении поверхности шарового сегмента (т. I, стр. 121).

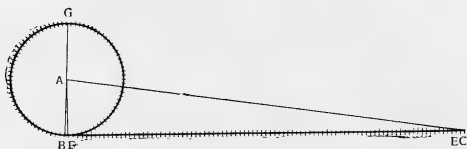


Рис. 23

Впрочем, наряду с такими приемами, в пределе дающими точные соотношения, Кеплер пользовался и заведомо неточными приближениями. Так, он принимает длину эллипса равной $\pi(a+b)$ по аналогии с тем, как площадь этой фигуры образуется из площади круга πa^2 . Но он указал, что это лишь приближенное выражение для длины эллипса.

Случайное обстоятельство дало повод Кеплеру подробно рассмотреть вопрос о кубатурах тел вращения. Это были его наблюдения над распространенным приемом измерять вместимость винных бочек, которую определяли независимо от формы с помощью всего одного промера — отметки на линейке, просунутой через наливное отверстие в верхней точке пуза до пятки днища. В «Новом измерении винных бочек» (*Nova stereometria doliorum vinariorum*, Lincii, 1615) Кеплер изложил «принципы» геометрических измерений, «как они установлены Архимедом, конечно, лишь настолько, насколько этого достаточно для удовлетворения ума, любящего геометрию, а полные и во всех частях строгие доказательства следует искать в самих книгах Архимеда, если кто не убоится тернистого пути их чтения»¹. Эти принципы опять-таки состоят в пользовании бесконечно малыми элементами фигур без уточнения основных понятий. Но если в «Новой астрономии» основным приемом было приближенное вычисление сумм неделимых в отношении между суммами, то в «Новом измерении» им является преобразование одних фигур в другие на основании равенности их соответственных беспрельдно малых частей или же неделимых элементов.

Доказывая, что отношение площади круга к квадрату диаметра приблизительно равно $11 : 14$, Кеплер усматривает «смысл» косвенного доказательства Архимеда в следующем. «Окружность круга BG содержит столько же частей, сколько точек, — именно бесконечное число. Каждую из них рассмотрим как основание некоторого равнобедренного треугольника с боковой стороной AB (рис. 23), и, таким образом, в площади треугольника окажется бесконечное множество треугольников, соединенных вершинами в центре A . Пусть далее окружность круга BG вытянута в прямую и пусть ей равна BC , а AB к ней перпендикулярна. Тогда основания всех этих бесчисленных треугольников или секторов будут представляться расположенными друг за другом по прямой BC ; пусть одно из таких оснований — BF , и какое-нибудь равное ему — CE ; наконец, соединим F , E , C с A . Таких треугольников ABF , ACE над прямой BC получится столько же, сколько секторов в площади круга, и их основания BF , EC и общая высота

¹ И. Кеплер. Новая стереометрия винных бочек. Перевод и предисловие Г. Н. Свешникова. Вступительная статья М. Я. Выгодского. М.—Л., 1935, стр. 109. Мы переводим слово *stereometria* более подходящим в данном случае словом «измерение».

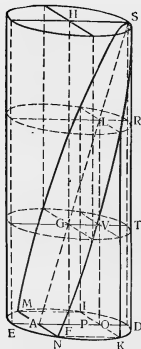


Рис. 25

определяется объем «пояса яблока» — его части, описываемой вращением вокруг AIN сегмента IKD (этот объем равен объему $IKDSL$)¹, — и даются указания относительно проведения расчетов. В частном случае полукруга отрезок цилиндрического копыта сразу же выражается через равный ему объем шара. Мы видели, что после Кеплера вычислением объемов цилиндрических отрезков занимались Григорий Сен-Венсан и Таке (стр. 132).

Во II части книги общая теория применяется к определению объема австрийской винной бочки, доказательству выгоды этой формы и обоснованию применения для измерения ее объема градуированной линейки. Изучая вопрос, при какой форме бочки имеют наибольшую вместимость, Кеплер пришел к изопериметрическим задачам. Попутно он заметил, что по обе стороны от места наибольшего значения величины ее убывание вначале нечувствительно. Через тридцать лет Ферма открыл общее правило отыскания экстремумов.

Подавляющее большинство результатов Кеплера было правильным. Но в нескольких случаях, опираясь на аналогии или заключения, представившиеся ему правдоподобными, он допустил ошибки. Мы упоминали о критике его труда Андерсоном и Гульдином, которые отметили некоторые такие ошибки (стр. 137). Но отдельные неточности не вытекали из существа инфинитезимальных методов Кеплера, и передовые математики той эпохи, как Брисс и Кавальери, горячо приветствовали его сочинение, раскрывшее яркие перспективы новых изысканий. Свое дальнейшее развитие метод неделимых получил прежде всего как раз у Кавальери.

¹ Вместе с тем Кеплер выражает объем пояса яблока, как сумму объема шарового пояса, образуемого вращением IKD (он равен велич отрезку цилиндра $LVT S$), и отрезка цилиндра $IKDT$.

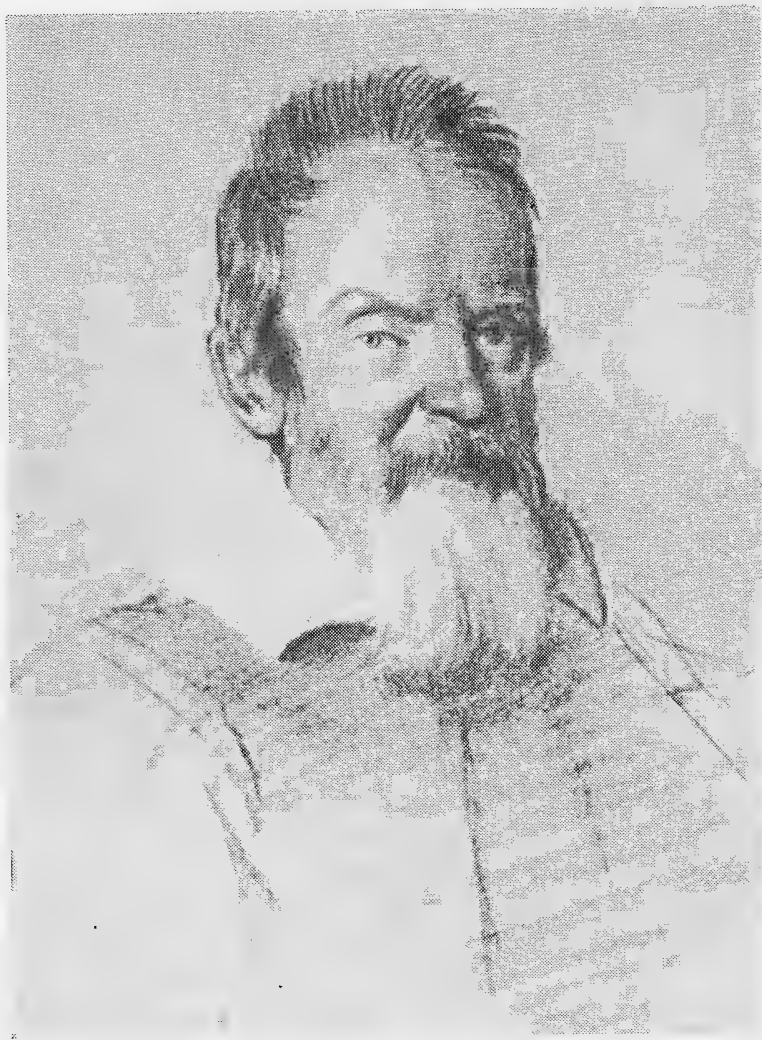
Галилей

Как уже говорилось, исключительно важное значение в развитии точных наук имела деятельность Галилео Галилея (1564—1642). Галилей — воспитанник и с 1589 г. профессор университета в Пизе, а с 1592 по 1610 г. профессор в Падуе, после того в течение долгих лет был «первым философом и математиком» великого герцога Тосканского во Флоренции. Драматическая судьба великого ученого, с 1605 г. открыто выступавшего с пропагандой гелиоцентрического учения и в 1632 г. опубликовавшего в его защиту знаменитый «Диалог о двух главнейших системах мира — птолемеевой и коперниканской» (*Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, tolemaico e copernicano*), общезвестна. Уже в следующем, 1633 г., эта книга была внесена в список запрещенных католической церковью сочинений, а автор под угрозой тяжелых репрессий был принужден отречься от своих убеждений и принести публичное покаяние; оставшиеся годы жизни он провел под наблюдением инквизиции, всячески затруднявшей его общение с учеными Италии и других стран. Мы не будем здесь перечислять великие открытия Галилея в астрономии, оптике и различных областях механики. Заметим только, что его «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению» (*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica e i movimenti locali*, Leiden, 1638), в которых были заложены основы динамики и учения о сопротивлении материалов, представляют и чисто математический интерес.

Еще в молодые годы, не позднее 1586 г., познакомившись с работой о центрах тяжести Коммандино (стр. 131), Галилей провел по этому вопросу собственное исследование и среди прочего нашел центр тяжести усеченного параллельно основанию параболоида вращения; доказательства он проводил в манере древних. Но после выхода труда Валерио (стр. 132), получившего те же и другие результаты, Галилей отказался от намерения издать свое сочинение, и оно увидело свет только в составе «Бесед».

Если сочинение о центрах тяжести все же было издано, то другой заманчивый Галилеем математический труд о неделимых, который он подготовлял в середине 20-х годов и о котором говорится в его переписке с Кавальери, вовсе не был завершен. Взгляды Галилея на взаимные связи между непрерывным и дискретным и на природу бесконечного нашли отражение и в этой его переписке, и в «Беседах». Он видел трудности, присущие понятиям и приемам инфинитезимальной математики, и много думал о том, как преодолеть эти трудности, но в сущности не пришел к каким-либо окончательным решениям. Некоторые его замечания очень глубоки. Мы говорили ранее о парадоксальных свойствах непрерывных бесконечных множеств точек, с которыми встретился Бравардин (т. I, стр. 273). Галилей придал подобного рода парадоксам новую форму, отображая счетное бесконечное множество на его бесконечную же часть. Именно он показывает, что всех целых квадратов, с одной стороны, меньше, чем всех целых чисел, а с другой стороны, их столько же, ибо, как мы говорим теперь, между этими множествами можно установить взаимно однозначное соответствие. Объяснение трудности Галилей видел в том, что «свойства равенства, а также большей и меньшей величины не имеют места там, где дело идет о бесконечности, они применимы только к конечным количествам»¹. Это не то ре-

¹ Г. Галилей. Избранные труды, т. 2. М., 1964, стр. 141.



Галилео Галилей
(по рисунку О. М. Леони 1624 г., хранящемуся в Лувре, Париж)

шение вопроса, которое предложил в конце XIX в. Г. Кантор, разработавший арифметику мощностей бесконечных множеств. Но Галилей был несомненно прав, утверждая, что обычные свойства равенства и неравенства в применении к таким множествам нарушаются. Этой констатацией он ограничился, полагая, что количество натуральных чисел не больше количества их квадратов, но и не одинаково с ним.

Быть может, колебания в вопросе о соотношении между континуумом и неделимыми были одной из причин, по которой Галилей не написал книгу о неделимых. Все же в «Беседах» неделимые употребляются при разборе одного из самых ответственных вопросов — проблемы равномерно-ускоренного движения. Теореме о том, что при таком движении, начинающемся с нулевой скоростью, путь проходит за то же время, что и при равномерном движении со скоростью, равной половине конечной скорости равномерно-ускоренного движения, Галилей доказывал, представляя (рис. 26) время движения общей стороной AB треугольника ABE и прямоугольника $ABGF$, «все моменты скорости» обоих движений — отрезками, параллельными BE , а пути — площадями этих фигур. Теорема сразу вы-



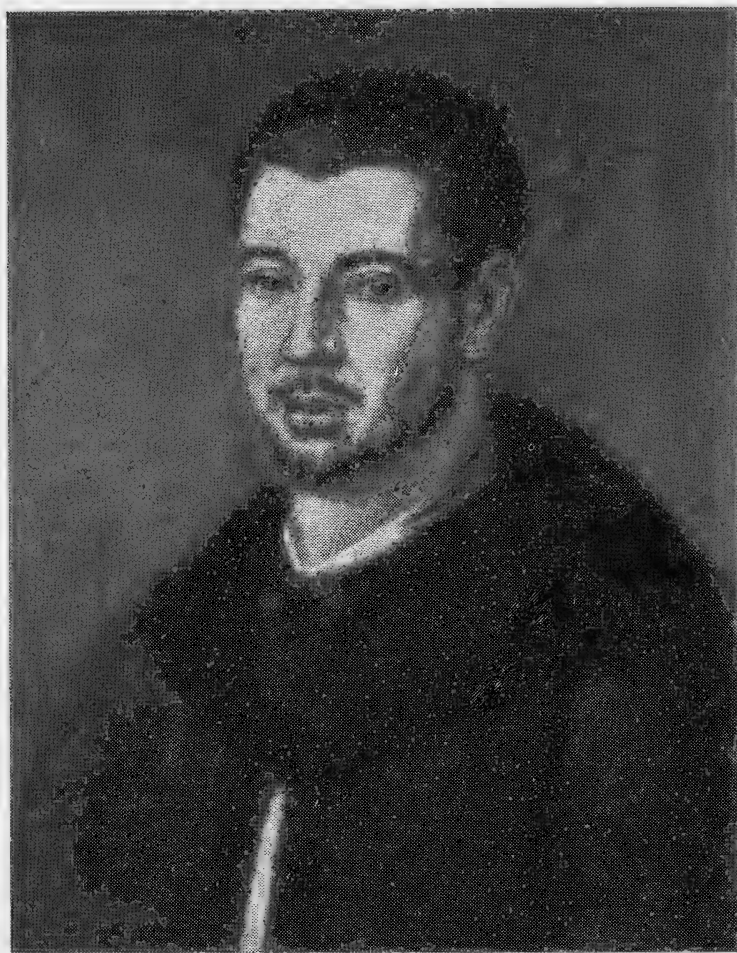
Рис. 26

текает из равенства площадей обеих фигур. Доказательство это, восходящее к Орему, повторялось многими — правда, вне всякой связи с движением падающих тел (см. т. I, стр. 279). В печатных книгах XVI в. оно встречается не менее семнадцати раз. В основе вывода лежит то же представление о площади, как о сумме линий, что у Кеплера, и представление о пути, как своего рода сумме скоростей. Впрочем, слово «неделимые» Галилей в данном случае не применил.

Метод неделимых Кавальери

Наиболее ярким и влиятельным представителем «геометрии неделимых», соединившей инфинитезимальные представления Кеплера и средневековой математической атомистики и вместе с тем руководившейся поисками общих вычислительных приемов, был монах-веронимит Бонавентура Кавальери (ок. 1598—1647). Кавальери изучал в Пизе математику под руководством приверженца и друга Галилея Бенедетто Кастелли (1577—1644), и успехи его были столь быстры и значительны, что Кастелли поручал иногда своему ученику замещать его на кафедре математики. Через Кастелли Кавальери познакомился с Галилеем, жившим тогда в расположенной неподалеку Флоренции. В конце 1621 г. Кавальери уже значительно продвинулся в разработке метода неделимых, и в переписке с Галилеем он обсуждал вопрос: представляют ли собой «все линии» двух плоских фигур величины, находящиеся между собой в некотором отношении? Кавальери приводил доводы в пользу как положительного, так и отрицательного ответа, но сам склонялся к первому. Впоследствии он выразил свою точку зрения следующими словами: *«Независимо от того, состоит ли непрерывное из неделимых или не состоит, совокупности неделимых сравнимы между собой и величины их стоят в определенном отношении друг к другу»*¹ (курсив в оригинале. — *Ред.*). Когда в 1629 г. освободилась кафедра ма-

¹ Б. Кавальери. Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного. М.—Л., 1940, стр. 208.



Бонавентура Кавальери

тематики в Болонье, Кавальери представил рукопись уже готового труда по геометрии неделимых. Кандидатуру его горячо поддержал Галилей, характеризовавший молодого ученого, как «соперника Архимеда». Профессором болонского университета Кавальери работал до конца жизни. Ему принадлежит несколько трудов по тригонометрии, логарифмам, геометрической оптике и т. д., но главным делом его жизни была «Геометрия, развитая новым способом при помощи неделимых непрерывного» (*Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, Bononiae, 1635) и служащие ее продолжением «Шесть геометрических этюдов» (*Exercitationes geometricae sex*, Bononiae, 1647). Сравнение площадей плоских фигур Кавальери сводит к сравнению «всех линий» (*omnes lineae*) их, которые можно представить себе как сечения фигур прямыми, движущимися или текущими (этот термин употребляется неоднократно), оставаясь все время параллельными некоторой направляющей — регуле. Аналогично для сравнения объемов тел вводятся взятые во всей их совокупности (но не в сумме!) плоские сечения. Относительно «всех линий» (или «всех плоскостей») двух равновеликих фигур во 2-й теореме второй книги доказывается, что они между собой равны, по какой бы регуле ни были взяты. Отсюда следует, что «все неделимые» одной и той же фигуры, взятые по какой-либо регуле, равны «всем неделимым» по любой другой регуле. Следующая, 3-я теорема

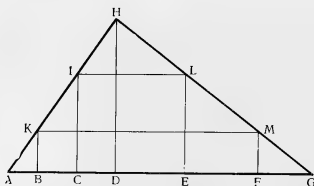


Рис. 27

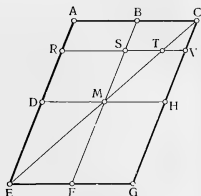


Рис. 28

второй книги гласит: «Фигуры относятся друг к другу, как все их линии, взятые по любой регуле, а тела, как все их плоскости, взятые по любой регуле»¹. Отсюда следует, что для нахождения отношения между двумя плоскими или телесными фигурами достаточно найти отношения между всеми неделимыми обеих фигур по какой-либо регуле. Это положение Кавальери называл основным в его новой геометрии.

Отметим еще 1-ю теорему седьмой книги: объемы (или площади) двух фигур равны, если равны между собой площади (или длины) всех соответственных их сечений, проведенных параллельно некоторой данной плоскости (или прямой). Это предложение было впоследствии включено во многие учебники геометрии в качестве очевидного «принципа Кавальери».

Мы уже упоминали о трудности, связанной с законом выбора неделимых, трудности, хорошо известной Кавальери. В «Шести геометрических этюдах», отвечая на различные возражения со стороны Гюльдина (стр. 137), Кавальери сам указал на парадокс, возникающий при неосмотрительном пользовании 3-й теоремой второй книги «Геометрия»: все линии треугольника HDA равны всем линиям треугольника HDC по общей регуле HD (рис. 27), и, казалось бы, по названной теореме неравные треугольники HDA и HDC должны быть равны. Парадокс объясняется тем, указывал Кавальери, что расстояния между линиями KB и IC не равны расстояниям между линиями MF и EL . Впрочем, ясных общих указаний о правиле выбора неделимых Кавальери не дал.

Было бы неточно сказать, что «все линии» площади между кривой $y = f(x)$, осью абсцисс и двумя ординатами соответствуют интегралу $\int_a^b f(x) dx$, но отношение «всех линий» двух фигур, $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, соот-

ветствует отношению двух интегралов: $\int_a^b f_1(x) dx : \int_a^b f_2(x) dx$. В «Геометрии»

Кавальери фактически вычислил два простейших интеграла степенной функции $y = x^n$ при $n = 1$, $n = 2$. В общей формулировке этих результатов состояло преимущество метода Кавальери перед разнообразными приемами преобразования фигур у Кеплера. Теорему об интеграции $y =$

¹ Б. Кавальери. Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного, стр. 209.

$= x^2$ можно было теперь применять, не выводя ее всякий раз вновь, к квадратуре параболы и спирали Архимеда, к кубатуре пирамиды и многих других тел, в том числе однополостного гиперболоида вращения — фигуры, на которую Кавальери обратил внимание первым и которую он назвал гиперболическим барабаном.

Впрочем, само вычисление интеграла от x^2 у Кавальери, который не применял новый алгебраический аппарат, было чисто словесным и довольно громоздким. Он вводит наряду со «всеми линиями» фигуры «все квадраты» на этих линиях и в 24-й теореме второй книги доказывает, что все квадраты параллелограмма относятся ко всем квадратам любого из треугольников, образуемых его диагональю, как 3 : 1. Если обозначать сумму квадратов линий фигуры Σ , то рассуждение Кавальери можно вкратце передать следующим образом. Пусть на рис. 28 $AB = BC$, $CH = HG$, $BF \parallel CG$ и за регулу принята EG , так что «все линии», как RV , параллельны EG . Поскольку $RT^2 + TV^2 = 2RS^2 + 2ST^2$, то, смещая RV из положения AC в EG , имеем

$$\Sigma AEC + \Sigma ECG = 2\Sigma AF + 4\Sigma BMC \text{ или } \Sigma AEC = \Sigma AF + 2\Sigma BMC.$$

Далее, по одному из следствий 22-й теоремы суммы всех квадратов двух подобных треугольников относятся, как кубы сходственных сторон, так что

$$\Sigma BMC = \frac{1}{8} \Sigma AEC;$$

кроме того,

$$\Sigma AF = \frac{1}{4} \Sigma AG.$$

Следовательно,

$$\Sigma AG : \Sigma AEC = 3 : 1.$$

В переводе на наш язык этот результат можно выразить формулой

$$\int_0^a a^2 dx : \int_0^a x^2 dx = 3 : 1 \text{ или } \int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}.$$

Через два года Кавальери распространил свой результат и на четвертые степени «всех линий»

$$\int_0^a x^4 dx = \frac{a^5}{5}$$

и благодаря этому смог вычислить объем тела, которое Кеплер назвал параболическим веретеном. Определение этого объема, выполненное Ибн ал-Хайсамом (т. I, стр. 241), было тогда неизвестно. Вскоре затем последовало обобщение на последующие степени вплоть до девятой и заключение по неполной индукции для любых натуральных показателей

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Все это Кавальери включил в «Шесть геометрических этюдов». Правда, к этому времени те же результаты были независимо получены и французскими математиками — Ферма, который ими владел с 1629 г., а также

Робервалем, который их нашел около 1634 г., но оба они ограничивались сообщением своих открытий в переписке.

Просторы, которые открывал метод неделимых, как и первые сделанные с его помощью открытия, произвели чрезвычайно сильное впечатление на младших современников Кавальери и ближайшее поколение, от Валлиса до Лейбница. Особенное влияние метод неделимых оказал на итальянских математиков, общее мнение которых выразил Торричелли, писавший: «Несомненно, что геометрия Кавальери есть удивительное по своей экономии средство для нахождения теорем и дает возможность разрешить огромное число, казалось бы, неразрешимых теорем краткими, прямыми, наглядными доказательствами, что невозможно сделать по методу древних. Это — истинно царская дорога среди зарослей математического терновника.... Метод Кавальери является действительно научным способом доказательства, всегда идущим путем прямым и свойственным самой природе. Жаль мне древней геометрии, что она либо не знала, либо не хотела признавать учения о неделимых...»¹.

Несмотря на ряд недостатков метода неделимых Кавальери, — прежде всего невыясненный математический смысл понятия «неделимого», отсутствие даже простейшей алгебраической символики и невозможность применить этот метод, по крайней мере непосредственно, к измерению длины дуг, ибо соответствующее неделимое является точкой, т. е. безразмерной величиной, — многие математики с энтузиазмом последовали за Кавальери. Употребление неделимых приводило к интересным находкам.

Ярким примером сказанного может служить одна из интеграций только что цитированного Эванджелисты Торричелли (1608—1647), ученика Кастелли и последователя Галилея и Кавальери. Более известны исследования Торричелли по физике (атмосферное давление, ртутный барометр, «торричеллиева пустота») и механике (парабола безопасности, закон истечения жидкости через боковую стенку сосуда). Но ему принадлежат и крупные математические открытия. Интеграция, о которой идет речь, представляет собой измерение объема бесконечно вытянутого тела *FEBCD* (рис. 29), получающегося при вращении вокруг асимптоты *AB* (или *Oy*) площади между равноугольной гиперболой $xy = a^2$, ординатой *CD* ее точки (x_0, y_0) и обеими асимптотами *AB* и *AC* (или *Ox*). Эта кубатура изложена в мемуаре «Об остром гиперболическом теле» (*De solido hyperbolico acuto*, 1641), опубликованном в сборнике работ Торричелли «Геометрические труды» (*Opera geometrica*. Florentiae, 1644). Здесь Торричелли воспользовался в качестве неделимых кривыми поверхностями. Именно, он представляет себе, что тело *FEBCD* составлено из цилиндрических поверхностей, образующие которых суть ординаты *IL* гиперболы, и площади каждой такой поверхности $2\pi xy = 2\pi a^2$ ставит в соответствие равную ей площадь круга на диаметре *MI* в прямом цилиндре *AHGC*, основание которого есть круг, построенный на диаметре *AH* $= 2\sqrt{2}a$ и перпендикулярный к горизонтальной асимптоте, а высота есть *AC* $= x_0$. Из равенства площадей соответственных неделимых тела *FEBCD* и цилиндра *AHGC* Торричелли заключает о равенстве объемов этого тела и цилиндра. Произведенное Торричелли оп-

ределение объема равносильно интеграции $\int_0^{x_0} 2\pi xy dx = \int_0^{x_0} 2\pi a^2 dx = 2\pi a^2 x_0$.

¹ E. Torricelli. Opera geometrica. Florentiae, 1644, p. 56.

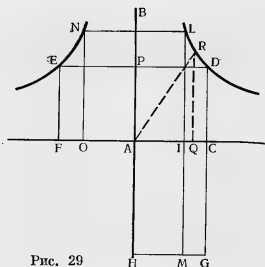


Рис. 29

Впрочем, «острым гиперболическим телом» Торричелли называет не $FEBDC$, но тело EBD , объем которого, очевидно, оказывается равным $\pi a^2 x_0$. Мы могли бы выразить этот последний объем несобственным интегралом

$\pi \int_{1/a}^{\infty} x^2 dy = \pi a^4 \int_{1/a}^{\infty} \frac{dy}{y^2}$, однако такого хода мыслей в сочинении Торричелли нет¹.

Что касается идеи искривленных неделимых, то еще Кавальери в шестой книге своей «Геометрии неделимых» применил их для сведения квадратуры площади между витком спирали Архимеда $\rho/a = \varphi/2\pi$ и окружностью $\rho = a$ к квадратуре сегмента параболы $x^2/a = y/2\pi$ — сведения, которое можно выразить преобразованием $\rho = x$, $\rho\varphi = y$ и интеграла $\int_0^a \rho\varphi d\rho$ в интеграл $\int_0^a y dx$.

Рассмотренный пример ни в коей мере не исчерпывает богатства математических открытий Торричелли. Его имя встретится далее не раз, и здесь мы лишь кратко перечислим несколько особенно выдающихся его результатов. Около 1641 г. он независимо от Декарта (см. стр. 163) исследовал логарифмическую спираль, которую называл геометрической, и дал ее квадратуру и спрямление. Наряду с Робервалем и Ферма (и опять-таки независимо) он произвел квадратуру парабол и гипербол любого порядка, т. е. кривых с уравнением $y^n = kx^{\pm m}$, причем совершенно правильно установил условие существования и значение несобственного интеграла $\int_a^{\infty} y dx$ в случае гипербол. Для этих же кривых он построил касательные. Вслед за тем, обобщая прием Кавальери, он распространил свои исследования на спирали высших порядков $\rho^n = k\varphi^m$. Наконец, он изучил логарифмическую кривую $x = k \log y$, показав, что ее подкасательная имеет постоянную величину, и определив как площадь между нею и ее асимптотой, так и соответствующий объем тела вращения. Все

интеграла $\int_a^{\infty} y dx$ в случае гипербол. Для этих же кривых он построил касательные. Вслед за тем, обобщая прием Кавальери, он распространил свои исследования на спирали высших порядков $\rho^n = k\varphi^m$. Наконец, он изучил логарифмическую кривую $x = k \log y$, показав, что ее подкасательная имеет постоянную величину, и определив как площадь между нею и ее асимптотой, так и соответствующий объем тела вращения. Все

¹ Напомним, что бесконечно простирающиеся фигуры конечной площади (или конечного объема) рассматривал еще Орем; см. т. I, стр. 280.



Эванджелиста Торричелли
(с портрета неизвестного художника XVII в., хранящегося
в галерее Уффици, Флоренция)

эти и еще некоторые открытия, сделанные в 1646—1647 гг., Торричелли собирался объединить в большом сочинении «О новых линиях» (*De lineis novis*). Однако преждевременная смерть помешала этому, и подготовленные им фрагменты увидели свет без малого триста лет спустя, в 1919 г. Но, хотя наиболее общие и тонкие математические открытия Торричелли остались в рукописях, они получили, по крайней мере частично, распространение еще в ту эпоху, прежде и более всего среди итальянских ученых, а через их посредство и далее, став известными Дж. Грегори, Барроу и другим. Впрочем, теперь трудно в точности оценить степень влияния неопубликованных открытий Торричелли, тем более что почти одновременно к ним в большинстве случаев приходили также Декарт, Роберваль, Ферма и еще некоторые геометры.

Заслуживает еще упоминания, что Торричелли трактовал неделимые не как геометрические образы на единицу меньшего измерения, чем данная фигура, но как однородные с нею бесконечно малые элементы, так что неделимым линией оказывается бесконечно малый ее отрезок или дуга и т. п. Такая трактовка открывала прямой путь к рассмотрению интегральных

сумм и интеграла, как их предела. Не менее важным был процесс алгебраизации метода неделимых, состоявший в переводе рассуждений и выкладок с геометрического языка на язык алгебраических формул. Каждое, даже небольшое, достижение в этом направлении укрепляло и усиливало зарождающийся математический анализ.

Арифметический вариант метода неделимых Валлиса

Если перевести теоремы Кавальери обо «всех квадратах», «всех кубах», и т. д. параллелограмма и треугольника на язык арифметики, то речь в них идет о том, что при бесконечном возрастании m отношение

$$\frac{0^m + 1^m + 2^m + \dots + m^m}{m^m + m^m + \dots + m^m} = \frac{\sum_{k=1}^m k^m}{(m+1)m^m}$$

стремится к значению $1/(n+1)$. В этом легко убедиться, разделив сторону AE параллелограмма $AECG$ (рис. 28) на равные части, проведя через точки деления отрезки, параллельные AC , и сделав соответствующие подсчеты. Простейшие случаи при $n = 1$ и $n = 2$ рассмотрены были Архимедом. В чисто арифметическом виде только что указанный предельный переход был произведен независимо друг от друга несколькими математиками, сначала Ферма, затем Робервалем, Декартом и Валлисом. Мы остановимся прежде всего на приеме английского математика, который непосредственно примыкал к методу неделимых. Правда, Валлис знал идеи Кавальери только по изложению Торричелли, «Геометрические труды» (1644) которого изучил в 1650 г. Но этого было вполне достаточно, чтобы Валлис, воспитанный на алгебре Гарриота и Отреда, приступил к созданию арифметического варианта метода неделимых. Свои результаты он изложил в «Арифметике бесконечных» (1656), о которой уже говорилось ранее.

Валлисова концепция неделимого не была, с нашей точки зрения, ясной. Например, в случае плоских фигур он отправляется от рассмотрения все возрастающего числа вписанных и описанных параллелограммов, и говорит, что при бесконечной малости их оснований разность между площадью данной фигуры и площадями вписанной и описанной фигур становится бесконечно малой или нулевой. Параллелограмм с бесконечно малым основанием, по словам Валлиса, едва ли есть что-либо иное, чем линия. Но независимо от того, есть ли неделимый элемент площади линия или нет, Валлис не применял в своих квадратурах и кубатурах ни вписанных, ни описанных фигур. Следуя Кавальери и вместе с тем оправдывая терминологию метода неделимых выгодной краткостью выражения, он постоянно опирается на представление, что плоские фигуры состоят из бесконечных по числу параллельных прямых. Аналогично трактуются неделимые элементы тел. Однако, в отличие от Кавальери, сравнение «всех линий» и их степеней Валлис выражает с помощью сумм арифметических рядов. Это отличие или, лучше сказать, противопоставление отражено в названии его сочинения. На смену геометрии неделимых шла арифметика бесконечных величин.

Прежде всего Валлис находит отношения указанных арифметических сумм, причем использует неполную индукцию даже там, где вывод можно

без особых трудностей провести полностью. Так, 21-е предложение, которое мы записали бы

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^m k^2}{(m+1)n^2},$$

выводится из наблюдения, что отношение $\frac{\sum_{k=0}^m k^2}{(m+1)n^2}$ при m , равном последовательно 1, 2, ..., 6, равно $1/3$, сложенной соответственно с $1/6$, $1/12$, ..., ..., $1/36$, так что второе слагаемое вообще имеет вид $1/6m$. Собственная формулировка теоремы Валлиса гласит: «Пусть предложен бесконечный ряд количеств, арифметически-пропорциональных в двойном отношении (или так, как в ряде квадратных чисел), непрерывно возрастающих, начиная от точки или 0; ряд этот относится к ряду стольких же количеств, равных наибольшему из предложенных, как 1 к 3»¹. Отсюда в предложении XXII немедленно получаются выражения объемов конуса и пирамиды через объемы равновысоких цилиндра и призмы с теми же основаниями, ибо конус и пирамида состоят из бесконечного числа плоских фигур, «подобных и параллельных, составляющих ряд количеств, арифметически пропорциональных в двойном отношении, наименьшее из которых — точка, наибольшее же — основание»². В следующем предложении XXIII точно так же производится квадратура параболы, а затем даются многие другие примеры. Проведя еще вычисление для $n = 3$, Валлис делает общий вывод, что

$$\int_0^x x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

для всех целых $n > 0$. Доказательство общего случая он обещает дать в дальнейшем; фактически, изучая ряды фигурных чисел, он вычислил суммы первых семи степеней ряда натуральных чисел.

Результат Валлиса можно, положив $y = x^n$, записать в виде

$$\int_0^x x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{xy}{n+1}.$$

Здесь xy выражает площадь прямоугольника между осями координат и координатными отрезками точки (x, y) кривой $y = x^n$. Эта площадь делится кривой на две части: прилегающую к оси абсцисс и прилегающую к оси ординат, причем они находятся в отношении 1 к n . Это дало Валлису интеграл степенной функции при дробном положительном показателе $1/n$:

$$\int_0^y \frac{1}{y^n} dy = \frac{ny}{n+1} = \frac{n}{n+1} y^{\frac{n+1}{n}}.$$

Интеграл для показателя вида m/n Валлис получил с помощью интерполяции, проверенной на нескольких примерах, в которых $1/n > 0$. Если

¹ Цит. по переводу И. Ю. Тимченко в книге Ф. Кэджори. История элементарной математики, стр. 331.

² Там же.

положить для простоты верхний предел равным единице, то интерполяцию можно пояснить таким примером самого Валлиса. Известно, что

$$\int_0^1 x^0 dx = \frac{1}{1} \text{ и } \int_0^1 x^1 dx = \frac{1}{2}.$$

Обозначим здесь знаменатели $1 = i_0$ и $2 = i_1$ и вычислим

$$\int_0^1 x^{1/2} dx = \frac{1}{i_{1/2}}$$

посредством следующей интерполяции между i_0 и i_1 . Если вставить между $x^0 = 1$ и x две средние геометрические x^0 : $x^{1/2}$: x^1 , то их показатели образуют арифметическую прогрессию $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$. Вставим между знаменателями i_0 и i_1 также две средние арифметические $4/3$ и $5/3$ и сравним обе возникшие арифметические прогрессии

показатели	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
знаменатели	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2

Показателю $1/3$ верхней соответствует значение $i_{1/3} = 4/3$ во второй и для интеграла $\int_0^1 x^{1/3} dx$ получается значение $3/4$, как и должно быть. Заодно

находится $i_{2/3} = 5/3$ и $\int_0^1 x^{2/3} dx = \frac{3}{5}$. Проверив таким образом свой интерполяционный прием, Валлис получил значение интеграла степенной функции для любого положительного показателя. Мы не будем останавливаться на случае отрицательных показателей, упомянем только, что при его рассмотрении он ввел символ бесконечности ∞ . О гораздо более сложных интерполяциях, давших Валлису бесконечное произведение для π , мы рассказали ранее (см. стр. 152).

Аналитические интеграции Ферма

Совершенно вне связи с исследованиями итальянских ученых собственные пути прокладывали П. Ферма и профессор Французского коллежа, впоследствии один из основателей Парижской академии наук, Жиль Персон Роберваль (1602—1675).

Ферма призывал квадратуру любых кривых $y = x^n$ (n — целое, большее нуля) еще около 1629 г. О своем открытии он рассказал в письме от 22 сентября 1636 г. Робервалю, не раскрыв, правда, свой метод. Роберваль 11 октября ответил, что и он пришел к тем же результатам, используя неравенства

$$\sum_{k=1}^{m-1} k^n < \frac{m^{n+1}}{n+1} < \sum_{k=1}^m k^n.$$

4 ноября Ферма разъяснил, что его прием опирается на такие же неравенства. Точно так же квадрировал Ферма спирали высших порядков.

Однако Ферма не был удовлетворен своим первым методом, требовавшим громоздкого последовательного вычисления сумм $\sum_{k=1}^m k^n$ для возрастающих

показателей n и неподходящим при дробных или отрицательных значениях n ¹. Около 1642 г. он разработал новый вычислительный прием, пригодный в равной мере для целых и дробных, положительных и отрицательных значений показателя, кроме $n = -1$. При этом он возродил метод интегральных сумм, которым, вероятно, пользовался и для квадратуры $y = x^n$ в случае натурального показателя. О своих результатах для $n > 0$, включавших также кубатуры и определения центров тяжести соответствующих тел вращения вокруг оси ординат, он письменно сообщил в 1644 г. Кавальери, оставив, впрочем, в секрете метод. Это, как мы знаем, было тогда распространенным явлением. Заметим, что и Декарт, излагая в письме от 13 июля 1638 г. к Мерсенну свое решение задачи о квадратуре парабол $y = x^n$, а также о кубатуре и центре тяжести их тел вращения вокруг оси, не разъяснил свой метод, так и оставшийся неизвестным².

Полное изложение своего нового метода Ферма дал в сочинении, окончательно оформленном после 1657 г., но изданном лишь посмертно в 1679 г., «О преобразовании уравнений мест... с приложением способа употребления геометрической пропорции к квадрированию бесчисленных парабол и гипербол» (*De aequationum localium transmutatione... cui annectitur proportionis geometricae in quadrandis infinitis parabolis et hyperbolis usus*). Метод, на который Ферма навел, вероятно, изучение Непера и который он сам назвал логарифмическим, фактически содержал двойной предельный переход и состоял в следующем. Допустим сначала, что квадрруется парабола $y = x^n$, $n = \frac{p}{q} > 0$. Отрезок оси абсцисс $(0, x)$ разбивается справа налево точками с абсциссами, образующими бесконечную убывающую геометрическую прогрессию $x, \alpha x, \alpha^2 x, \dots, \alpha^m x, \dots$, причем, поскольку $\alpha < 1$, то $\alpha^m x \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Ординаты y , проведенные в точках деления

$$x^{p/q}, \alpha^{p/q} x^{p/q}, \alpha^{2p/q} x^{p/q}, \dots, \alpha^{mp/q} x^{p/q}, \dots,$$

разбивают квадрлируемую площадь на бесконечное количество криволинейных четырехугольников с основаниями Δx , равными

$$(1 - \alpha)x, \alpha(1 - \alpha)x, \alpha^2(1 - \alpha)x, \dots, \alpha^m(1 - \alpha)x, \dots$$

¹ В этих вычислениях Ферма основывался на суммировании арифметических рядов выс-

ших порядков: $2 \sum_{k=1}^n k = n(n+1)$, $3 \sum_{k=1}^n k(k+1) = n(n+1)(n+2)$, $4 \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = n(n+1)(n+2)(n+3)$, и т. д. (ср. стр. 85 и 153).

² Задачу о центрах тяжести Мерсенн поставил перед Декартом 28 апреля 1638 г. по предложению Ферма. Как видно, Декарт справился с ней очень быстро. Вот его результаты (для натуральных значений n): 1) площадь прямого сегмента параболы относится к площади вписанного треугольника с вершиной в вершине сегмента, как $2n : (n+1)$; 2) центр тяжести в этом случае делит отрезок оси, считая от вершины, в отношении $(n+1) : n$; 3) объем сегмента тела вращения относится к объему вписанного конуса, как $3n : (n+2)$, и 4) центр тяжести делит в этом случае ось в отношении $(n+2) : n$.

После того находится сумма площадей прямоугольников $y\Delta x$, также образующих бесконечную прогрессию

$$(1-\alpha)x^{\frac{p+q}{q}} + (1-\alpha)\alpha^{\frac{p+q}{q}}x^{\frac{p+q}{q}} + \dots \\ \dots + (1-\alpha)\alpha^m\frac{p+q}{q}x^{\frac{p+q}{q}} + \dots = \frac{1-\alpha}{1-\alpha^{\frac{p+q}{q}}}x^{\frac{p+q}{q}}.$$

Теперь знаменатель прогрессии абсцисс α берется столь близким к единице, чтобы можно было, как пишет Ферма, положить приближенно равными друг другу смешаннолинейные четырехугольники, на которые разбита квадритуемая площадь, и прямоугольники $y\Delta x$, имеющие с ними общие основания. Другими словами, производится второй предельный переход и искомая площадь определяется, как предел суммы $\sum y\Delta x$ при $\alpha \rightarrow 1$, причем наибольшее $\Delta x \rightarrow 0$. Для этого производится подстановка $\alpha = \beta^q$, так что

$$\frac{1-\alpha}{1-\alpha^{\frac{p+q}{q}}} = \frac{1-\beta^q}{1-\beta^{p+q}} = \frac{1+\beta+\beta^2+\dots+\beta^{q-1}}{1+\beta+\beta^2+\dots+\beta^{p+q-1}}$$

и при $\alpha \rightarrow 1, \beta \rightarrow 1$

$$\int_0^x x^{p/q} dx = \frac{q}{p+q} x^{\frac{p+q}{q}}.$$

Сам Ферма провел выкладки при $n = 1/2$ и $n = 2/3$, но его рассуждения и окончательный вывод имели вполне общий характер. Он обогатил возрожденный им метод интегральных сумм новой техникой и впервые после Сабита ибн Корры (см. т. I, стр. 239) применил деление отрезка интегрирования на неравные части.

Такой же прием использовал Ферма для вычисления бесконечно простирающейся площади между какой-либо ординатой гиперболы $y = x^n$, где $n = -p/q$, причем $p > q$, самой кривой и асимптотой Ox ; в этом случае он брал $\alpha > 1$. Тем самым он вычислил значение сходящегося несобственного интеграла

$$\int_x^\infty x^{-p/q} dx = \frac{q}{p-q} x^{\frac{q-p}{q}} \quad (p > q).$$

В случае $p < q$ площадь, прилегающая к Ox , бесконечна, но конечной оказывается площадь, примыкающая к асимптоте Oy , так что просто меняются ролями оси. Относительно случая $n = -1$, т. е. $y = 1/x$, Ферма ограничивается замечанием, что при указанном делении оси абсцисс все части квадритуемой площади между собой равны. Но ему, без сомнения, было ясно, что площади простой гиперболы измеряются логарифмами, — факт, установленный ранее Григорием Сен Вексаном и Сарасой (см. стр. 133).

В том же сочинении Ферма применил и другие приемы интеграции: замену переменных и интегрирование по частям, позволявшие приводить

новые квадратуры к уже известным. Его правило интегрирования по частям

$$\int_0^a y^n dx = n \int_0^b y^{n-1} x dy$$

имело еще частный характер; оно следует из того, что интегралы $\int_0^a z dx$ и

$\int_0^b x dz$ выражают собой одну и ту же площадь между осями координат и монотонно убывающей кривой, пересекающей оси в точках $(a, 0)$ и $(0, b)$. Зато этим правилом Ферма пользовался с замечательным искусством. Так, чтобы вычислить площадь между «локоном Аньези» $y = a^3/(a^2 + x^2)$ (см. стр. 254), осью Oy и асимптотой Ox , подстановкой $ay = z^2$

интеграл $\int_0^\infty y dx$ преобразуется в $\frac{1}{a} \int_0^\infty z^2 dx$, а этот интеграл сводится к

$\frac{2}{\pi} \int_0^a xz dz$. Затем подстановка $xz = ta$ вместе с предыдущей и исходным уравнением кривой после исключения x, y дает $t^2 = a^2 - z^2$ и

$$\frac{2}{a} \int_0^a xz dz = 2 \int_0^a t dz$$

выражается площадью полукруга радиуса a , так что несобственный интеграл $\int_0^\infty \frac{a^3 dx}{a^2 + x^2}$, который мы вычисляем теперь с помощью арктангенса, оказывается равным

$$\int_0^\infty \frac{a^3 dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{2} a^2.$$

Ферма обнаружил еще целый класс интегралов, сводящихся к квадратуре круга, именно интегралов вида $\int (a^2 - x^2)^{\frac{n}{2}} dx$, где n — нечетное число, и показал, как можно последовательно выражать данный интеграл через интегралы того же вида с заменой n на $(n - 2)/2$ и низшие степени вплоть до $n = 1$ ¹.

Свою технику интегриаций Ферма применил также к декартову листу $x^3 + y^3 = axy$ (подстановка $a^2 y = tx^2$), сведя дело к квадратуре двух гипербол: интеграл $\int y dx$ выражается через $\int tx^2 dx$ и затем через $\int x^3 dt$, где $x^3 = (a^5 t - a^6)/t^3$.

¹ Так, в случае $n = 3$ Ферма полагает $a^2 - x^2 = y^2$ и интегрированием по частям и подстановкой $xy = at$ сводит $\int y^3 dx$ к $\int xy^2 dy$, $\int ty dy$ и $\int y^2 dt$, а затем подстановкой $y^2 = az$ к $\int z dt$; так как $z^2 + t^2 = az$, то последний интеграл приводится к $\int \left[\left(\frac{a}{2} \right)^2 - t^2 \right]^{1/2} dt$.

Если сравнить данный мемуар Ферма, в котором около двадцати страниц печатного текста, с огромным томом «Геометрии неделимых» Кавальери, то преимущество метода французского математика становится особенно разительным: более общие результаты он изложил в двадцать раз короче, ничего не теряя в удобопонятности. Правда, он полностью оставил в стороне проблему непрерывного и неделимых, но ее анализ не имел для математики XVII в. существенного значения.

Квадратуры Ферма свидетельствовали о решительных преимуществах вычислений с бесконечно малыми элементами фигур, имеющих с ними одну и ту же размерность, перед употреблением неделимых в той форме, какую он имел у Кавальери. Помимо тех безграничных возможностей, какие таило в себе применение алгебраической техники и вспомогательных средств вычислений, метод интегральных сумм был особенно удобен для различных аналитических преобразований, начиная с разбиения промежутка интегрирования и замены его аргумента. Кроме того, интегральные суммы были применимы к задачам, недоступным методу Кавальери, как спрямление кривых. Наконец, эти суммы сами по себе служили важным средством аппроксимации и связывали приближенные вычисления с интеграциями.

Циклоида и синусоида

Несмотря на преимущества метода интегральных сумм в общей математической стратегии и метод неделимых давал порой удивительные по изысканству решения задач, для которых в то время вычислительная техника оказалась бы недостаточной. Одним из наиболее показательных примеров может служить квадратура циклоиды.

Еще Николай Кузанский в середине XV в., наблюдая перемещение гвоздя, вбитого в колесо движущегося экипажа, задумался над природой описываемой им кривой. Галилей, назвавший кривую циклоидой (от греческого *κύκλος* — круг), пытался в конце XVI в. определить отношение площади одной ее арки к площади образующего круга путем взвешивания. Мерсенн поставил ту же задачу перед Робервалем, который дал в 1634 г. следующее ее решение. Допустим, что образующий круг радиуса r начинает катиться по прямой в момент, когда описывающая циклоиду точка находится в начале O этой прямой. Пусть в некоторый другой момент катящийся круг занимает положение, указанное на рис. 30, совершив оборот на угол φ , причем описывающая циклоиду OMB точка находится в M . Роберваль ввел в рассмотрение вспомогательную кривую, являющуюся местом проекции N точек M на вертикальный диаметр катящегося круга. Эту кривую ONB он назвал спутницей циклоиды. Спутница делит площадь прямоугольника, описанного около циклоиды, на две части, равные в силу симметрии спутницы относительно прямой, проведенной параллельно OB через центр круга. Циклоида и ее спутница ограничивают два равных лепестка, а площадь каждого из них равна площади полукруга, так как «все линии» лепестка MN представляют собой одновременно хорды, составляющие полукруг. Поэтому площадь циклоиды равна половине площади описанного прямоугольника, сложенной с площадью образующего круга, т.е. $\frac{1}{2} 2\pi r \cdot 2r + \pi r^2$, или утроенной площади образующего круга.

Вскоре затем, между 1635 и 1638 гг., Роберваль дал построение касательной к циклоиде (см. стр. 204) и между 1636 и 1647 гг. определил

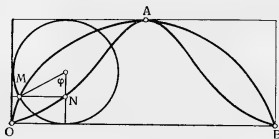


Рис. 30

объемы тел, порождаемых при вращении ее арки вокруг основания, вокруг касательной к вершине и вокруг перпендикуляра к основанию в его конце.

Благодаря Мерсенну часть этих результатов приобрела известность, и с конца 30-х годов XVII в. циклоида становится одной из наиболее популярных кривых, на которых математики особенно охотно испытывали силу своих методов. В соревновании друг с другом, но независимо квадратуру и построение касательной к кривой произвели в 1638 г. Декарт и Ферма; около 1640 г. к тем же результатам вновь пришел Торричелли, которого в проведении касательной несколько опередил его друг, ученик Галилея Винченцо Вивiani (1622—1703). Дело не обошлось и без споров о приоритете, которые мы полностью оставим в стороне. Позднее исследованием циклоиды успешно занимались Паскаль, Валлис и многие другие ученые, а Гюйгенс и И. Бернулли установили ее важные механические свойства. Но всему этому нам придется еще вернуться. Пока мы отметим, что печатно впервые сообщил о квадратуре циклоиды и построении к ней касательной Торричелли в своих «Геометрических трудах» 1644 г., а до того вся информация распространялась лишь в форме переписки. Как и многие другие ученые, Роберваль совершенно не спешил с публикацией своих открытий, предпочитая поражать современников итоговыми результатами, чем давать им в руки средства решения трудных задач. Быть может, для такого поведения у него лично были особые основания. Согласно воле Петра Рамуса, основателя кафедры Французского коллежа, которую занимал Роберваль, ее профессор через каждые три года должен был сам объявлять конкурс на ее замещение, ставя публично несколько вопросов. Тот, кто побеждал в этом конкурсе, имел право занять кафедру. Именно в таком соревновании Роберваль занял этот пост впервые в 1634 г., и можно понять, что он остерегался разглашать свои методы. Так или иначе его сочинения, в том числе основной «Трактат о неделимых» (*Traité des indivisibles*), были впервые напечатаны в сборнике «Divers ouvrages de Mathématique et de Physique», изданном Парижской академией наук в 1693 г.

Введенная Робервалем спутница циклоиды есть не что иное, как синусоида, в чем легко убедиться, выразив координаты точки M в функции угла φ , приняв за координатные оси левую и нижнюю стороны прямоугольника. Линией синусов назвал эту кривую живший в Риме французский мезуит Онорé Фабри (1607—1688), автор не лишнего интереса «Геометрического труда о линии синусов и циклоиде» (*Opusculum geometricum de linea sinuum et cycloide*. Romae, 1659), а также «Обзора геометрии» (*Synopsis geometrica*. Lugduni, 1669). Мы упоминаем сочинения этого

ученого, потому что он вновь, независимо от Роберваля, получил некоторые его результаты, например, проинтегрировал

$$\int_{x_1}^{x_2} \sin x \, dx = \cos x_1 - \cos x_2,$$

а в исследовании циклоиды пошел самостоятельным путем, отправляясь от другого ее определения: если представить себе образующий круг в центральном положении и от вертикального диаметра проводить отрезки параллельно основанию, то циклоида есть место концов таких отрезков, по длине равных сумме лежащей на них полухорды круга и верхней отсекаемой на окружности дуги (см. стр. 201). Это определение можно записать уравнением $x = r\psi + r \sin \psi$, где ψ — угол между вертикальным диаметром и радиусом, проведенным к другому концу названной дуги. С работой Фабри был знаком Лейбниц, впервые записавший уравнение циклоиды в виде

$$y = \sqrt{2x - x^2} + \int dx: \sqrt{2x - x^2}$$

в одной статье, опубликованной в 1686 г. (см. стр. 262).

Интеграции Б. Паскаля

Метод интегральных сумм получил дальнейшее развитие в трудах Б. Паскаля, написанных во второй половине 50-х годов. Хорошо знакомый с воззрениями и трудами как сторонников метода неделимых, так и его критиков — Кавальери, Роберваля, Гульдина, Таке и других, Паскаль не отказывался от терминов вроде «сумма линий», или «сумма ординат», или «сумма нескончаемого множества (*une multitude indéfinie*) линий»¹, но всегда понимал под ними интегральные суммы. С его точки зрения, метод неделимых по существу тождествен методу древних, отличаясь лишь манерой выражаться; поэтому, говорил он, можно без опасения пользоваться «языком неделимых». В сборнике работ «Письма А. Деттонвиля о некоторых его геометрических открытиях» (*Lettres de A. Dettonville sur quelques-unes de ses inventions en géométrie*. Paris, 1659)² последовательно проводится эта концепция, причем подчеркивается необходимость явно указывать, на какие равные и неограниченно малые (*indéfinies*) «части» прямой или кривой умножаются линии, если только выбор «частей» не является в данной задаче «естественным». При неограниченно большом (*indéfini*) числе членов такая сумма отличается от искомой величины — площади, объема, статического момента и т. д. — «лишь на величину, меньшую любой данной»³, т. е. оказывается ей равной.

Быть может, наибольшее значение для последующего развития анализа получила одна лемма в «Трактате о синусах четверти круга» (*Traité des sinus du quart de cercle*), вошедшем в упомянутый сборник. Для произвольной точки D на окружности радиуса r строится треугольник EKE ,

¹ B. Pascal. Oeuvres complètes, v. II. Paris, 1858, p. 544.

² А. Деттонвиль — один из псевдонимов Паскаля.

³ B. Pascal. Oeuvres complètes, v. II, p. 544.

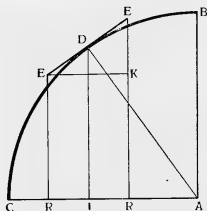


Рис. 31

где EE — отрезок касательной и DI — линия синуса (рис. 31). Этот треугольник подобен треугольнику ADI , и стороны его остаются в постоянном отношении, сколь бы малыми их ни брать. Поэтому $DI \cdot EE = AD \cdot KE = AD \cdot RR$. Если теперь какую-либо дугу окружности разделить на равные сколь угодно малые части DD и просуммировать обе части предыдущего равенства, заменяя отрезки касательных EE «равными» им дугами DD , то получается теорема: сумма синусов DI , умноженных на дугу DD , равна отрезку основания между крайними синусами, умноженному на радиус.

В наших символах $BD = s$, $DI = y$, $AI = x$ результаты Паскаля можно записать следующим образом:

$$y \, ds = r \, dx \quad \text{и} \quad \int_0^s y \, ds = \int_0^x r \, dx,$$

что дает сразу два интеграла:

$$\int_0^\varphi \sin \varphi \, d\varphi = 1 - \cos \varphi \quad \text{и} \quad \int_0^\psi \cos \psi \, d\psi = \sin \psi,$$

где φ — угол DAI , и ψ — угол DAB . Заметим, что $y \, ds$ представляет собой момент дуги окружности относительно оси AC и это позволяет найти центр тяжести дуги. Далее, при вращении окружности вокруг оси AC на 90° отрезок ds описывает элемент $\frac{1}{2} \pi y \, ds$ поверхности $\frac{1}{8}$ шара, которая сразу получается равной $\frac{1}{2} \pi r^2$. Впрочем, такие выводы не были бы в то время новыми и Паскаль на них не останавливается.

Мы не можем задерживаться на других специальных результатах Паскаля, большая часть которых относится к квадратуре, кубатуре и отысканию центров тяжести фигур, связанных с циклоидой, а также цилиндрических копыт. Средствами служат интегрирование или преобразование интегралов степеней синуса и некоторых частных случаев функций вида $(1-x^2)^{m/2} x^n$; в этих целях употребляются замена переменных и интегрирование по частям, (в более общем виде, чем у Ферма). Выдвижение на первый план общих приемов и ясность языка принадлежали к важным достоинствам небольших по объему работ Паскаля. Однако Паскаль совершенно не пользовался символикой новой алгебры. Здесь, быть мо-

жет, играли роль и чисто личные соображения: его друзья Роберваль и Ферма были в плохих отношениях с Декартом.

«Трактат о синусах четверти круга» оказал значительное влияние на творчество Лейбница, который познакомился с ним по совету Гюйгенса в 1673 г. Бесконечно малый треугольник EKE со сторонами dx , dy , ds привлек особое внимание Лейбница, назвавшего его «характеристическим». Здесь, по словам Лейбница, он усмотрел идею, которой не было у автора. Прежде всего он увидел, что с помощью такого треугольника, взятого для произвольной плоской кривой, можно вычислять площади любых поверхностей вращения, используя его подобие с треугольником, образованным ординатой, поднормалью и нормалью, т. е. выражая $2\pi \int y ds$ интегралом

$2\pi \int n dx$, где n — отрезок нормали. Когда Лейбниц сообщил о своем наблюдении Гюйгенсу, тот ответил, что и сам некогда произвел таким образом компланацию параболоида, эллипсоида и гиперболоида вращения, а заодно дал ему второй совет: использовать в этих целях алгебраические уравнения конических сечений. Так Лейбниц смог впервые оценить пользу синтеза декартова алгебраического метода с интеграционными приемами, мимо чего прошел Паскаль (ср. стр. 253).

Характеристическим треугольником математики пользовались иногда и ранее как в дифференциальных, так и в интеграционных задачах; но у Паскаля его применение выступило особенно отчетливо, к тому же в печатном труде. Подобие этого треугольника с конечными (кроме названного, особенно с треугольником, образуемым подкасательной, ординатой и отрезком касательной) стало с середины XVII в. распространенным средством многих ученых. Здесь мы хотели отметить историческую роль, которая припала на долю характеристического треугольника Паскаля.

Спрямления и компланации

Метод интегральных сумм принес богатые плоды и в задачах на спрямление кривых и компланацию поверхностей. Декарт в «Геометрии» высказал мнение, что алгебраическое спрямление алгебраических линий невозможно. Это утверждение было опровергнуто лишь через двадцать лет. Но уже через год он сам спрямил, правда не алгебраическую, а трансцендентную, кривую — логарифмическую спираль, длина дуги которой, считая от полюса, пропорциональна радиус-вектору конца дуги — свойство, которое знал и Торричелли (см. стр. 179).

Несколько спустя проблема спрямления кривых встала в порядок дня. Так как общего понятия об интеграле еще не было, ее сводили к квадратурам, а кроме того, занимались поисками зависимостей между длинами дуг различных кривых. В сущности здесь пользовались характеристическим треугольником, заменяя бесконечно малую дугу кривой ее хордой или отрезком касательной, что давало $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ в декартовых координатах и $ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi$ в полярных. Из первых во времени результатов упомянем, что в 1643 г. Роберваль доказал равенство длин дуг (при подходящем выборе параметров) спирали Архимеда и параболы, а Ферма и Торричелли сделали то же самое для спиралей $\rho^n = k\varphi^m$ и соответствующих парабол высших порядков. Напомним, что такая же взаимосвязь была обнаружена между квадратурами этих кривых — для простейшего

случая спирали Архимеда и обычной параболы — Кавальери. Помимо того, Ферма представил дугу параболы $y^2 = 2px$ площадью между гиперболой $x^2 - y^2 = p^2$, осью ординат и двумя абсциссами. В самом деле, эти дуга

и площадь могут быть выражены одним интегралом $\int_{y_1}^{y_2} \sqrt{y^2 + p^2} dy$.

Такое сведение спрямления к квадратуре известной кривой было равносильно нашему выражению искомой величины в логарифмической и иррациональной функциях. Это же спрямление произвел и Гюйгенс.

В печати на возможность сколь угодно точного приближения дуги кривой при помощи вписанных и описанных ломаных указал Валлис в «Арифметике бесконечных» (1656). Длины кривых и прямых линий, согласно Валлису, могут оказаться соизмеримыми или просто равными. Однако ни одного конкретного спрямления с помощью намеченного им приема он не произвел.

Возможность алгебраического спрямления алгебраических кривых была доказана независимо друг от друга четырьмя математиками на примере полукубической параболы $ay^2 = x^3$, дуга которой выражается квадратурой обыкновенной параболы

$$y = \frac{1}{2a} \sqrt{4a^2 x + 9ax^2}.$$

В 1657 г. это удалось оксфордскому студенту Вильяму Нейлю (1637—1670), а вскоре — ученику Схоотена Хендрику Хейрату (1633—1660), небольшая статья которого была в 1659 г. напечатана во втором латинском издании декартовой «Геометрии». Затем задача была решена Ферма и Гюйгенсом. Почти одновременно было произведено спрямление циклоиды — прежде всего (1658) Кристофером Реном (1632—1723), который, подобно Нейлю, был воспитанником Оксфордского университета, затем ряд лет состоял профессором астрономии в Лондоне и Оксфорде, участвовал в организации Королевского общества, но особенно прославился, как выдающийся архитектор и один из строителей лондонского собора св. Петра. Открытия Нейля и Рена опубликованы в «Двух трактатах о циклоиде и циссоиде» (*Tractatus duo de cycloide et de cissoide*. Oxoniae, 1659) Валлиса.

После того как был найден прием спрямления кривых, сведены были к квадратурам и вычисления площадей поверхностей для случая тел вращения. Мы уже упоминали о компланациях поверхностей второго порядка, произведенных Гюйгенсом, который в 1657 г. установил, например, что площадь поверхности параболоида вращения выражается алгебраической квадратурой, а эллипсоида — квадратурой круга и гиперболы, т. е. крутовой и логарифмической функциями. Эти открытия Гюйгенса быстро распространились благодаря переписке, но опубликованы были, притом без доказательства, лишь в «Маятниковых часах», изданных в 1673 г. В этом же сочинении Гюйгенс указал один частный способ спрямления, вытекающий из свойств эволют (см. стр. 209).

Задача о касательных

Развитие механики и астрономии в XVI—XVII вв. выдвинуло на передний план прежде всего задачи интегрального исчисления, такие, как определение центров тяжести, вычисление пути и траектории по данному за-

кону скорости, определение давления на стену плотины и т. п. Задачи на касательные и экстремумы вначале привлекали меньшее внимание. В античном наследии также можно было найти большее разнообразие интеграционных задач и приемов, чем дифференциальных, хотя еще Вьет, изучая спираль Архимеда, рассматривал и свойства ее касательной. Лишь отдельные задачи такого рода всплывали то у одного, то у другого автора, например у Тарталья (вопрос об угле наклона, обеспечивающем наибольшую дальность полета снаряда) и Кеплера (задача о наибольшем по объему параллелепипеде, вписанном в данный шар). Такое положение дел быстро изменяется уже во второй четверти XVII в. С этого времени проблемы дифференциального исчисления разрабатываются с таким же усердием и успехом, как и интеграционные. В их исследовании сочетались приемы алгебраические и инфинитезимальные, чисто математические и механические.

Кинематический подход немало способствовал установлению взаимосвязи между проведением касательных, нахождением скоростей и операцией дифференцирования. Отметим один особенно характерный момент: при таком подходе, естественно, возникло представление, что движение точки, описывающей кривую линию, в каждый момент направлено по касательной к ней. На этом основывалось принципиально новое толкование касательной. Для древних касательная была прямой, встречающейся с данной кривой в одной точке. Теперь касательная выступает в сущности как предельное положение секущей, проходящей через две бесконечно большие точки описываемой траектории. Такая кинематическая трактовка позволяла рассматривать касательную как диагональ подвижного параллелограмма, вершина которого лежит в точке касания, а стороны суть подходящим образом выбранные составляющие мгновенной скорости движения или же действующей на движущуюся точку силы. Кинематическая концепция касательной, выросшая на почве новой механики и особенно учения о движении Галилея, получила в XVII в. чрезвычайно широкое распространение. В тех или иных вариантах, отличающихся лишь в форме выражения, мы находим ее у Декарта, Роберваля, Торричелли, Дж. Грегори, Барроу и Ньютона, а Роберваль и Торричелли подробно разработали метод построения касательной с помощью параллелограмма скоростей или сил (см. стр. 200). Следует добавить, что в ходе исследований было заодно раскрыто общее содержание задач на построение касательной и на нахождение наибольших и наименьших значений. Впрочем, связь между двумя последними проблемами была установлена еще Архимедом (см. т. I, стр. 128), и некоторые ученые XVII в., как Торричелли и его ученик Микеланджело Риччи (1619—1682), возродили метод великого грека.

Алгебраический метод нормалей Декарта

Первым по времени опубликования приемом проведения касательных и нормалей явился метод Декарта, которым он владел уже в 1629 г. Задаче построения нормалей и, следовательно, касательных Декарт придавал исключительно важное значение; приступая к ней в «Геометрии» (1637), он писал: «Для разыскания всех свойств кривых достаточно знать отношение всех их точек к точкам прямых и способ проведения других линий, пересекающих кривые во всех этих точках под прямыми углами»¹.

¹ Р. Декарт. Геометрия, стр. 49.

К проблеме нормалей Декарта привели поиски оптических линз, преломляющих или отражающих все лучи, выходящие из одной данной точки в другую данную точку. Дело сводилось к отысканию кривой, для которой синусы углов, образуемых нормалью с радиус-векторами, соединяющими точки кривой с источником света и с точкой схода преломленных лучей, имеют данное отношение. Получив решение этой обратной задачи на касательные, по-видимому, с помощью инфинитезимальных рассуждений, Декарт затем доказал свойство найденных им при этом овалов (которые являются кривыми четвертого порядка) алгебраически с помощью изобретенного им алгебраического же метода построения нормалей и касательных. Его метод, предполагающий понятие о кратных корнях уравнений и опирающийся на другое капитальное открытие Декарта — метод неопределенных коэффициентов, таков. Чтобы построить нормаль в точке $M(a, b)$ алгебраической кривой $f(x, y) = 0$, — Декарта интересовало именно построение нормали, а не вывод ее уравнения, — ищется точка пересечения $N(c, 0)$ нормали с осью абсцисс. Если NM есть нормаль, то окружность с центром в точке N и радиусом NM касается данной кривой в точке M ; если же центр окружности будет хоть несколько смещен из N в другую точку оси абсцисс N' , то окружность радиуса $N'M$ встретится с данной кривой в соседстве с M по крайней мере еще в одной точке. Таким образом, искомая окружность должна иметь с данной кривой две или более общих точки, слившихся в одну. Координаты точек пересечения кривой $f(x, y) = 0$ и окружности $(x - c)^2 + y^2 = (a - c)^2 + b^2$ находятся совместным решением их уравнений, для чего исключается одна из координат. При совпадении точек пересечения в M корень $x = a$ (или $y = b$) результирующего уравнения должен быть по крайней мере двойным, а это накладывает на искомую величину c определяющее ее условие.

Для нахождения значения c Декарт применяет метод неопределенных коэффициентов, основанный на том, что при тождестве двух целых алгебраических многочленов тождественны их коэффициенты в членах одинаковой степени.

Примем для определенности, что исключается y и что результирующее уравнение $F(x) = 0$ имеет степень n . Поскольку корень $x = a$ двойной или высшей кратности, левая часть $F(x)$ содержит множитель $(x - a)^2$. Декарт представляет ту же левую часть в виде произведения $(x - a)^2$ на многочлен $(n - 2)$ -й степени с неопределенными коэффициентами α_i и, приравнявая в тождестве

$$F(x) \equiv (x - a)^2 \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i x^i$$

коэффициенты членов одинаковой степени, получает уравнения для вычисления коэффициентов α_i и искомого значения c . Отметим еще раз, как полезна была регулярная запись алгебраических уравнений, которой постоянно придерживался Декарт.

Свой алгебраический метод Декарт пояснил в «Геометрии» на нескольких примерах — эллипса, заданного уравнением относительно вершины, трезубца Ньютона, овалов и, наконец, конхоиды. В последнем случае он не привел расчетов, и этот пробел восполнил в комментариях к латинскому изданию «Геометрии» Схоотен. Мы приведем для иллюстрации чрезвычайно простой пример, также рассмотренный Схоотеном. Требуется построить нормаль к параболу $y^2 = kx$ в точке $M(a, b)$. Исключая из уравне-

ний параболы и окружности $(x - c)^2 + y^2 = (a - c)^2 + b^2$ координату y , имеем

$$(x - c)^2 + kx - (a - c)^2 - b^2 = 0,$$

и, поскольку левая часть уравнения должна быть тождественной с $(x - a)^2$,

$$c = a + \frac{k}{2}, \quad \text{или} \quad c - a = \frac{k}{2}.$$

Последнее равенство выражает известное свойство параболы $y^2 = kx$: ее поднормаль постоянна.

Метод неопределенных коэффициентов Декарта впоследствии приобрел большую ценность, чем алгебраический метод нормалей, применение которого в системе прямолинейных координат ограничивалось алгебраическими кривыми и, кроме того, требовало громоздких вычислений¹. Впрочем, одно упрощение почти бросалось в глаза: прием Декарта удобнее применять не к нормальям, а к касательным, находя условие совпадения двух точек пересечения данной кривой и прямой, уравнение которой только первой степени. Это указал сам Декарт в одном из писем 1638 г., и это же подробно разъяснил в комментариях к латинскому изданию «Геометрии» Схоотен, применивший такой упрощенный прием к построению касательной в точке перегиба конхоиды. Решение этой задачи опубликовал без доказательства в 1654 г. Гюйгенс. Схоотен обосновал построение Гюйгенса, основываясь на том, что в точке перегиба сливаются в одну три точки пересечения кривой и секущей прямой, так что соответствующее результирующее уравнение должно иметь тройной корень. Заметим, что алгебраический способ отыскания касательных иногда излагается и в современных учебниках, когда хотя бы вывести уравнения касательных к коническим сечениям без средств дифференциального исчисления.

Выше, во второй главе, говорилось, что И. Гудде, побуждаемый исследованиями Декарта, разработал метод отыскания кратных корней алгебраического уравнения. Этот метод чисто алгебраического характера, и его приложения изложены в «Двух письмах, из которых в одном идет речь о приведении уравнений, а в другом о максимумах и минимумах» (*Epistolae duae, quarum altera de aequationum reductione, altera de maximis et minimis agit*), адресованных Гудде Схоотену в 1657—1658 гг. и помещенных во втором латинском издании «Геометрии». По существу кратные корни уравнения $f(x) = 0$ находятся как общие корни уравнений $f(x) = 0$ и $f'(x) = 0$; очевидно, что, исходя из этого, можно находить корни любой кратности. Впрочем Гудде пришел к своему результату из алгебраических соображений и не производил дифференцирования функции $f(x)$, а кроме того, высказал свое правило в несколько иной и более общей форме. Именно, согласно Гудде, кратный корень уравнения

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

¹ Декарт хорошо понимал широкое значение метода неопределенных коэффициентов и ожидал от него важных новых приложений. Заканчивая решение задач на нормали, он обращается к читателю: «Мне все же хочется попутно сообщить вам, что идея введения двух одинакового вида уравнений с целью сравнить все члены одного с соответствующими членами другого и таким образом породить несколько уравнений из одного ... может пригодиться в бесчисленном множестве других задач и является не из последних в применении мною методе» (*Р. Декарт. Геометрия*, стр. 58).

является также корнем уравнения

$$ax^n + (a + b) a_1 x^{n-1} + (a + 2b) a_2 x^{n-2} + \dots + (a + nb) a_n = 0,$$

где a и b можно брать произвольно, сообразуясь с удобством вычислений. В частности, Гудде брал и $a = n$, $b = -1$, тогда второе уравнение после сокращения на x совпадает с $f'(x) = 0$. Что прием Гудде по существу совпадает с общепринятым теперь, легко увидеть, записав его второе уравнение в виде

$$af(x) + b[nf(x) - xf'(x)] = 0.$$

Доказательство Гудде провел на примере уравнения пятой степени. Свой метод отыскания кратных корней Гудде применил к построению касательных и нормалей, показав на примерах Декарта, что при этом величина, несколько выше обозначенная s , находится проще, чем по способу неопределенных коэффициентов, а также к определению экстремумов. В последнем случае формальный прием Гудде, приводимый им без объяснений, фактически состоит в применении уравнения $f'(x) = 0$.

Метод экстремумов и касательных Ферма

Около 1629 г., примерно в одно время с тем, как Декарт открыл алгебраический метод нормалей, Ферма изобрел другой прием, пригодный для нахождения как экстремумов, так и нормалей. Вскоре после выхода «Геометрии» Ферма прислал через Мерсенна Декарту и Робервалю небольшое сочинение «Метод отыскания максимумов и минимумов» (*Methodus ad disquirendam maximam et minimam*), где изложил этот прием, которому предстояло войти важной составной частью в анализ бесконечно малых¹.

Сначала Ферма формулирует общее правило экстремумов для целого алгебраического многочлена $f(x)$, которое мы передадим в современных обозначениях, ни в чем не отступая от Ферма по существу. Составляется выражение $f(x + h)$, и оно приблизительно приравняется $f(x)$. Здесь и в других аналогичных случаях, например при квадратуре парабол и гипербол (см. стр. 185), Ферма применял слово «приравнивание» (*adaequatio*) со ссылкой на Диофанта, у которого соответствующий греческий термин означал именно приближенное равенство. Затем в приближенном равенстве $f(x + h) \approx f(x)$ сокращаются равные члены, производится сокращение на возможно высшую степень h и, наконец, опускаются члены, еще содержащие после сокращения множитель h . Решение возникшего уравнения дает значения x , которые могут сообщить $f(x)$ максимальное или минимальное значение.

Правило Ферма, очевидно, совпадает с нашим необходимым условием экстремума дифференцируемой функции $f(x)$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) = 0.$$

¹ Этот мемуар был напечатан только в собрании сочинений Ферма 1679 г. По предложению Мерсенна краткие сведения о методе Ферма включил Эригон (1644) во второе издание своего «Курса математики», а Схоотен дал с помощью этого метода еще одно построение нормали к конхоиде (ср. стр. 194).

Многие преемники Ферма полагали, что он трактовал величину h как бесконечно малую в том не вполне определенном смысле, какой этому слову нередко придавали в XVII в. На самом деле и здесь, и в других случаях Ферма оперировал бесконечно малыми, не употребляя этого термина, точно так, как это делалось в доказательствах по методу исчерпывания и как поступаем мы. Другими словами, он оперировал конечными переменными величинами, значения которых могут быть взяты меньшими любой данной величины. Он только не производил ϵ , δ -оценок. Это видно из обоснования метода экстремумов, предложенного Ферма в одном письме 1643 г., — в рассматриваемом сочинении правило дано было без доказательства¹. Мысль Ферма, поясняемая на примере целого многочлена $f(x)$, заключалась в следующем. Если $f(x)$ имеет значение максимума при $x = a$, то для всех достаточно малых $h > 0$ одновременно $f(a + h) < f(a)$ и $f(a - h) < f(a)$, или, что то же,

$$f(a + h) - f(a) = f_1(a)h + f_2(a)h^2 + f_3(a)h^3 + \dots < 0,$$

$$f(a - h) - f(a) = -f_1(a)h + f_2(a)h^2 - f_3(a)h^3 + \dots < 0.$$

Так как при достаточно малом h и $f_1(a) \neq 0$ знак левой части совпадает со знаком первого члена, то для одновременного выполнения обоих неравенств необходимо выполнение равенства $f_1(a) = 0$. В предположении $f_2(a) \neq 0$ из аналогичных соображений следует, что при $f_2(a) < 0$ максимум действительно имеет место. Точно так же выясняется, что при $f_3(a) = 0$ и $f_2(a) > 0$ имеет место минимум. Как видно, Ферма располагал и простейшим дифференциальным достаточным условием максимума и минимума, хотя в сочинениях своих его не опубликовал. Остается добавить, что изложенный вывод Ферма в главных чертах совпадает с тем, который был предложен Эйлером (1755) для любых аналитических функций с помощью разложения в ряд Тейлора. Этот же вывод употребляется в наших руководствах с тем усовершенствованием, что в формуле Тейлора учитывается остаточный член.

Для целых неявных многочленов $f(x, y) = 0$ Ферма находил экстремумы, присоединяя к данному уравнению еще уравнение

$$\frac{df}{dx_i} = 0.$$

В случае иррациональных функций ему приходилось предварительно приводить уравнение к рациональному виду.

Приведя простой пример задачи на максимум, Ферма далее писал: «Отыскание касательных в данных точках каких-либо кривых мы приводим к вышеизложенному методу»². Здесь он не дает общего правила, но только пример построения касательной TM в точке M параболы $x : y^2 = \text{const}$ путем отыскания отрезка подкасательной TX (рис. 32). Явного определения понятия касательной здесь нет; фактически имеется в виду, что дуга кривой в некоторой окрестности ее общей точки с касательной лежит по одну ее сторону. Если слева от ординаты точки M провести ординату другой точки параболы M' , то свойство параболы, по-

¹ Это письмо было опубликовано только в XX в. См. *Oeuvres de Fermat, supplément aux t. I—IV publié par C. de Waard. Paris, 1922, p. 123—125.*

² См. *Р. Декарт. Геометрия*, стр. 155.

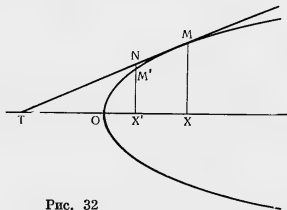


Рис. 32

добие треугольников TXM и $TX'N$, а также неравенство $X'M' < X'N$ дают

$$\frac{OX}{OX'} = \frac{XM^2}{X'M'^2} > \frac{XM^2}{X'N^2} = \frac{TX^2}{TX'^2}.$$

Отсюда при обозначениях $OX = x$, $OX' = x - h$, $TX = t$, $TX' = t - h$ следует $\frac{x}{x-h} > \frac{t^2}{(t-h)^2}$ или $t^2h + xh^2 > 2txh$. Теперь Ферма производит приравнивание, т. е. заменяет неравенство равенством, сокращает на h и затем опускает член xh . В итоге он получает, что подкасательная

$$t = 2x,$$

добавляя: «Как оно и есть на самом деле»¹.

Объяснения своего приема Ферма не привел, а его слова о том, что касательные находятся по тому же методу, что и максимумы или минимумы, были слишком буквально и потому не вполне точно поняты Декартом. Это повлекло за собой продолжавшуюся около полугода переписку, в которую были вовлечены также Роберваль и другие математики, — переписку, полную резких и часто несправедливых обвинений, но вместе с тем важных новых мыслей. Из писем Ферма ясно, как он обосновывал метод приравнивания, равносильный дифференцированию и в данном случае. По идее это обоснование, так же как в задаче об экстремумах, опирается на оценку величины подкасательной с помощью точных неравенств. Сам Ферма в письме от июня 1638 г. писал, что его доказательство «имеет своим главным основанием то, что $A + E$ (наше $x + h$. — *Ред.*) дает то же, что $A - E$ (наше $x - h$. — *Ред.*)»². Действительно, если взять точку M' справа от M , то к неравенству $t^2h + xh^2 > 2txh$ добавится неравенство $t^2h < 2txh + xh^2$, так что

$$2x - \frac{xh}{t} < t < 2x + \frac{xh}{t},$$

откуда и следует в виду произвольной малости h , что $t = 2x$.

В приложении к цитированному письму Ферма дал и общее правило касательных, заключающееся в «приравнивании» ординаты касательной

¹ Р. Декарт. Геометрия, стр. 157.

² Там же, стр. 171.

$X'N$ и ординаты кривой $X'M'$ в соседстве с точкой касания. Если обозначить $XM = y$, $X'M' = y - \Delta y$ и $h = \Delta x$, то приближенное равенство

$$X'N = XM \frac{TX'}{TX} \approx X'M' \quad \text{или} \quad y \frac{t - \Delta x}{t} \approx y - \Delta y$$

в результате приравнивания перейдет в точное:

$$\frac{dx}{t} = \frac{dy}{y}, \quad \text{или} \quad t = y: \frac{dy}{dx}.$$

Здесь же на примере декартова листа $x^3 + y^3 = axy$ Ферма показал, как находить касательные в случае неявного уравнения кривой $f(x, y) = 0$; в этом случае его вычисления, равносильные составлению уравнения

$$t \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y = 0,$$

не требовали предварительного решения уравнения. При наличии в уравнении иррациональностей требовалось, как и в задаче на экстремумы, сначала избавиться от них.

Декарт, со своей стороны, в ходе переписки подошел к пониманию касательной как предельного положения секущей, проходящей через две точки кривой с ординатами $X'M'$ и XM (см. рис. 32), которые относятся, как $m : n$, когда XM становится равной $X'M'$, а отношение $m : n$ — отношением равенства $m : n = 1$.

Однако такая трактовка не легла у Декарта в основу нового определения касательной, а служила только для объяснения применяемого в методе Ферма отбрасывания членов: ведь при $m = n$ величина, обозначенная выше h , «равна ничему»¹. Придерживаясь прежнего понимания касательной, Декарт считал, что не может существовать касательная прямая к кривой в точке перегиба. Ферма, внимание которого к этому вопросу привлек в 1636 г. Роберваль в связи с изучением конхоиды, встал на более широкую точку зрения (хотя и не сформулировал нового определения касательной), а главное дал общий аналитический прием отыскания точек перегиба. Рассматривая положение касательной относительно кривой, он установил, что в этих точках угол касательной с осью абсцисс принимает экстремальное значение. Поскольку тангенс этого угла α есть отношение ординаты к подкасательной $\operatorname{tg} \alpha = y/t = y'$, он выражается в функции абсциссы, и соответствующие выкладки равносильны образованию уравнения $y'' = 0$. Выше было сказано, что Схоотен в комментариях к «Геометрии» находил точки перегиба как такие, в которых сливаются три точки пересечения кривой с некоторой прямой. Отысканием точек перегиба занимались и другие ученые, например Хейрат, Гудде и Гюйгенс.

¹ См. письмо Декарта от июня 1638 г., адресованное французскому судебному чиновнику и любителю математики Клоду Арди (ум. 1678) в книге: *Р. Декарт. Геометрия*, стр. 181.

Мы упоминали, что одновременно разрабатывались и кинематические приемы построения касательных. Правда, эти приемы не могли долго конкурировать с несравненно более единообразными аналитическими методами и требовали более индивидуального подхода к отдельным кривым; кроме того, их недостаточно осторожное применение легко могло привести к ошибочным результатам. Но, с другой стороны, эти приемы иногда вели к чрезвычайно простым и изящным конструкциям и содержали в начальной форме идеи интересных теорий. Роберваль и Торричелли придали этим приемам некоторую общность, причем в печати первым выступил Торричелли, пришедший к своему методу несколько позднее, чем Роберваль, хотя и совершенно независимо. В сочинении «О движении естественно падающих и брошенных тел» (*De motu gravium naturaliter descendantium et projectorum*), подготовленном в 1641 г. и опубликованном в собрании его трудов 1644¹, Торричелли построил таким образом касательную к параболу $x^2 = 2py$. Касательная выступает как диагональ параллелограмма, вершина которого находится в точке касания, а стороны пропорциональны вертикальной и горизонтальной скоростям брошенного тяжелого тела, движущегося по параболу. Отношение названных скоростей или импульсов Торричелли заимствовал из «Бесед» Галилея. Если записать уравнение движения в параметрической форме $x = v_0 t$, $y = gt^2/2$, так что $y = gx^2/2v_0^2$, то отношение $v_y : v_x = gt : v_0 = gx : v_0^2 = 2y/x$ и, следовательно, отрезок подкасательной на оси ординат равен $2y$. Здесь же поясняется, как доказать, что касательная к коническому сечению есть биссектриса угла между направлениями радиус-векторов; для этого рассматриваются компоненты скорости по радиус-векторам (в случае параболы вместо одного из них следует взять прямую, проходящую через точку касания параллельно оси). О построении касательных к высшим параболом, гиперболам и спиралям (1646—1647) мы уже упоминали.

Заметим, что в той же работе Торричелли нашел огибающую семейства параболических траекторий тел, бросаемых под различными углами из данной точки с данной начальной скоростью, — так называемую параболу безопасности. Точнее говоря, он нашел соответствующий параболоид вращения, имеющий фокус в точке бросания. Все точки пространства между поверхностью параболоида и плоскостью горизонта доступны попаданию при данной начальной скорости, точки же вне параболоида недоступны. Это был первый пример огибающей семейства кривых. Общая теория огибающих восходит, однако, лишь к Лейбницу.

Метод касательных Роберваля в принципе сходен с только что указанным. Французский математик с его помощью решил эту задачу для конических сечений, конхоиды, квадратрисы, циклоиды и т. д. Этими результатами он располагал еще в конце 30-х годов, но в письменном виде он их представил Парижской академии только в 1668 г. в сочинении «Замечания о сложении движений и о способах находить касательные кривых линий» (*Observations sur la composition des mouvements et sur les moyens de trouver les touchantes des lignes courbes*). Этот мемуар был опубликован с дру-

¹ Именно в этом сочинении изложены открытые Торричелли законы истечения жидкости из отверстия в боковой стене сосуда — параболическая форма струи вытекающей жидкости и др.

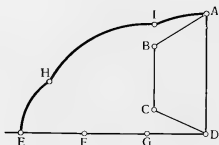


Рис. 33

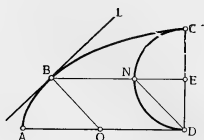


Рис. 34

лими его сочинениями в 1693 г. В случае циклоиды рассуждение Роберваля было таково. Точка M , описывающая циклоиду, участвует в двух движениях (см. рис. 30). Одно направлено по касательной к образуемому кругу, проходящему через M , а другое по прямой MN , параллельной основанию циклоиды. Так как скорости обоих движений одинаковы, ибо основание циклоиды равно длине окружности образуемого круга, то касательная в M является биссектрисой угла между касательной к кругу в M и прямой MN .

Столь же красиво построение нормали к циклоиде, данное вскоре после Роберваля, но совершенно независимо Декартом в письме к Мерсенну от 23 августа 1638 г. Если по прямой ED катится многоугольник $ABCD$, то его точка A описывает дуги окружностей EH , HI , IA с центрами соответственно в F , G , D (рис. 33), а нормали к этим дугам проходят всякий раз через центры F , G , D . Рассматривая образующий круг как многоугольник с бесконечным количеством сторон, Декарт заключает, что нормаль к циклоиде BO в точке B всегда проходит через нижнюю точку O образуемого круга в положении, соответствующем B (рис. 34). Таким образом, нормаль BO параллельна отрезку ND , проходящему через нижнюю точку образуемого круга в его центральном положении, а прямая BL , перпендикулярная к BO , есть касательная. Такое решение, как указал Декарт, можно распространить и на другие «рулетты», т. е. кривые качения. Сам он это сделал для укороченной и удлинненной циклоиды, а для первой нашел еще точку перегиба. В зародыше решение Декарта содержало учение о мгновенных центрах вращения.

Ферма нашел подкасательную циклоиды с помощью своего общего приема, используя в качестве «уравнения» циклоиды соотношение $BE = \widetilde{NE} + NB$, о котором говорилось ранее в связи с работами Фабри (см. стр. 189). Касательные ко всем трем видам циклоид построил и Торричелли.

Формализация метода Ферма

В конце 50-х годов был сделан новый шаг вперед в подготовке исчисления бесконечно малых: аналитические правила касательных и экстремумов были высказаны в более формализованном виде. Конечно, общие словесные указания Ферма и его выкладки в отдельных задачах были равносильны дифференцированиям, но теперь идет речь о механических процедурах, равносильных правилам дифференцирования, только высказанных без специфической терминологии и символики дифференциального

исчисления. Такие алгоритмы нам уже встречались; к ним относится, скажем, прием отыскания кратных корней алгебраических уравнений Гудде путем составления производного уравнения¹.

С аналогичной формализацией мы встречаемся у бельгийского любителя математики Рене Франсуа де Слюза (1622—1685), который в молодости провел несколько лет в Италии, где сдружился с Риччи, а затем состоял священником в Льеже. Слюз сообщил правило, как вычислять выражение подкасательной для любой кривой с уравнением

$$\sum a_{mn} x^m y^n = 0,$$

— нужно, именно, записать уравнение

$$t \sum m a_{mn} x^{m-1} y^n + y \sum n a_{mn} x^m y^{n-1} = 0$$

(это частный случай равенства

$$t \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

см. стр. 199), после чего t находится делением. Если учесть, — Слюз рассуждал, по-видимому, сходным образом, — что

$$\lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{x_1 - x}{y_1 - y} = \frac{t}{y},$$

то правило получается, если для двух точек кривой (x, y) , (x_1, y_1) составить разность

$$\sum a_{mn} x_1^m y_1^n - \sum a_{mn} x^m y^n = \sum a_{mn} x^m (y_1^n - y^n) + \sum a_{mn} y_1^n (x_1^m - x^m) = 0$$

и, поделив на $y_1 - y$, перейти к пределу при $x_1 \rightarrow x$, $y_1 \rightarrow y$. Экстремум такой функции де Слюз находил, исходя из того, что касательная в нем параллельна оси абсцисс, так что $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Два письма де Слюза Ольденбургу были напечатаны в «Philosophical Transactions» за 1672—1673 гг., и в 1674 г. он был избран членом Королевского общества. Правила де Слюза, найденные им около 1655 г., с 1673 г. применял Лейбниц. Грегори и Ньютон пришли к тому же результату самостоятельно, последний не позднее 1665 г.

Отправляясь от метода Ферма, к сходным формальным процедурам пришел также Гюйгенс, с 1657 г. состоявший в оживленной переписке с де Слюзом. Укажем для примера только общие правила Гюйгенса для определения экстремума целого многочлена $f(x) = 0$ и рациональной функции $f_1(x)/f_2(x)$, которые мы можем записать соответственно в виде

$$f'(x) = 0 \text{ и } f_1'(x) f_2(x) - f_1(x) f_2'(x) = 0.$$

¹ Ферма по существу подходил уже к этому, предлагая в упомянутом приложении к письму от июня 1638 г. всегда употреблять для одних и тех же отрезков, служащих при отыскании касательных, одни и те же обозначения, «какова бы ни была природа кривой» (Р. Декарт. Геометрия, стр. 172). Применяя для приращения абсциссы специальный знак E , он не ввел, однако, символа приращения ординаты; это сделал Барроу (см. стр. 204).

Впрочем небольшое сочинение Гюйгенса, содержащее эти предложения, было напечатано только в 1693 г.

В переписке Слюза с Гюйгенсом были, в частности, рассмотрены примеры кривых, которые Слюз называл эллиптондами, а Б. Паскаль — жемчужинами. Уравнения их имеют вид $y^m = x^n (a \pm x)^p$ и представляют собой обобщения уравнений эллипса и гиперболы относительно вершины. Слюз занялся построением касательных к такого рода линиям, Гюйгенс квадрировал некоторые из них, т. е. проинтегрировал отдельные случаи биномиального дифференциала (ср. стр. 246). Характерно для этой ранней стадии аналитической геометрии и инфинитезимальных вычислений, что чертежи обоих ученых содержат ошибки, например: рисуются лишние дуги, симметричные относительно оси абсцисс, и остаются вне поля зрения бесконечные ветви. Десять лет спустя задачи на жемчужины Слюз включил во второе издание своего «Мезолабия» (*Mesolabium*, Liège, 1659 и 1668). Несомненно, что к изучению жемчужин Слюз пришел под влиянием Риччи, который дал построение касательных к кривым $x^m y^n = (ax + by + c)^{m+n}$, опубликованное им в «Геометрическом опыте о максимумах и минимумах» (*Exercitatio geometrica de maximis et minimis*, Romae, 1666), но найденное уже примерно в середине 40-х годов. Одна из жемчужин $ky^3 = x^2 (a + x)$ послужила примером построения подкасательной во «Всеобщей части геометрии» Дж. Грегори (1668), применившего для этого, подобно (и, вероятно, вслед за) Ферма, пропорцию $\frac{y}{t} \approx \frac{y - \Delta y}{t - \Delta x}$, в которой затем приращение абсциссы, обозначенное Грегори o (ср. стр. 234), полагается после преобразований и деления на o бесконечно малым или, как он говорил, ничем — *nihil*, причем приближенное равенство переходит в точное.

Исаак Барроу

Остановимся на методе касательных, изложенном в «Лекциях по оптике и геометрии» (*Lectiones opticae et geometricae*, Londini, 1669—1670) Исаака Барроу (1630—1677). Барроу, считавший своим главным призванием богословие, после обучения в Кембриджском университете несколько лет провел в странствиях по странам Европы и Востока, а вернувшись в Англию стал сначала профессором греческого языка в Оксфорде, затем — математики в Грешем Колледже в Лондоне и с 1663 г. в Кембридже. Здесь он познакомился с Ньютоном, поступившим в университет в 1661 г. Барроу высоко ценил гениальные способности Ньютона; знакомство оказалось полезным для обоих. В 1669 г. Барроу отказался от профессуры и был назначен придворным священником короля Карла II. Проповеди Барроу доставили ему громкую известность. Как математик, он продолжал заниматься изданием латинских обработок сочинений греческих классиков — делом, которое увлекало его и ранее. Так вышли в его изложение труды Евклида, Архимеда, Аполлония и Феодосия.

«Лекции» Барроу свидетельствуют об обширных познаниях, почерпнутых из всей доступной в то время литературы, а также из частных бесед. Несомненно, что он был многим обязан итальянской школе математиков, Декарту и Ферма, Валлису и Грегори. Менее ясно, в какой мере отразилась на «Лекциях» помощь, оказанная автору Ньютоном. В предисловии к первой части книги, содержащей оптические лекции, Барроу писал, что



Исаак Барроу
(с портрета И. Вуда, хранящегося в Ronan Picture Library)

его коллега Ньютон, муж замечательного дарования, просмотрел сочинение, рекомендовал некоторые улучшения и кое-что добавил сам. Действительно, Ньютон «кое-что» внес в оптические лекции. Что же касается математической части труда, участие Ньютона, вероятно, ограничилось одним советом, о котором говорится несколько далее. Инфинитезимальные методы еще в середине 60-х годов получили у Ньютона гораздо большее развитие, чем в книге Барроу, и это свидетельствует о независимости изложения в «Лекциях по геометрии» от влияния Ньютона.

В первых двух лекциях идет речь о понятии движения, являющемся для Барроу исходным. Движения сравниваются между собой по скорости, а для этого требуется еще понятие о времени. Время не зависит от движения, оно есть длительность (*perseverantia*) каждой вещи в ее бытии, но количество времени измеряется при помощи какого-либо движения. Вместе с тем время как одномерно протяженная величина, порождаемая непрерывным течением момента — мгновения, может быть представлено прямой линией; точно так же скорости во всякий момент движения могут быть изображены отрезками, перпендикулярными к прямой времени. Обра-

зованные совокупностями отрезков-скоростей, плоские фигуры представляют тогда соответствующие «движения» или «совокупные скорости» (т. е. пути и средние скорости). В третьей лекции рассмотрено образование кривых линий с помощью составных движений. Все эти мысли имеют большое сходство со взглядами на отправные понятия математики Ньютона, и здесь весьма вероятно влияние на него со стороны Барроу (ср. стр. 216). В то же время эта кинематическая концепция принадлежала долгой традиции, через Непера, с одной стороны, и Галилея, — с другой, восходящей к оксфордским калькуляциям и парижской теории широт форм (см. т. I, стр. 270 и след.).

Четвертая лекция посвящена проведению касательных, как диагоналей прямоугольника движений, одно из которых направлено по горизонтали, а другое — по вертикали, в манере Роберваля и Торричелли, с приемами которых Барроу мог познакомиться, будучи во Франции и Италии. Пропуская следующие лекции, мы остановимся еще на вычислении подкасательной, изложенном в десятой лекции по совету, как писал автор друга, которого он не называет, но которым, без сомнения, был Ньютон, — об этом впоследствии вспоминал сам Ньютон. Это вычисление есть не что иное, как метод Ферма, но приведенный к виду общего расчетного правила. Алгебраический по своему характеру прием Барроу, сформулированный в немногих словах, основывался на явном применении бесконечно малых величин, а также бесконечно малого характеристического треугольника.

Барроу рассматривает касательную TM к кривой AMN в точке M (рис. 35) и, принимая отрезок дуги MN безгранично малым (*indefinite parvum*), строит бесконечно малый треугольник MRM , подобный конечному треугольнику TPM . Он обозначает $MP = m$, $TP = t$, $NR = a$ и $MR = e$. В отличие от Ферма он дает обозначения приращением обеих координат, а не только абсциссы: это и позволяет механизировать расчетный прием до конца, — правда, не в виде формулы, для чего еще недостает других символов. Правило Барроу таково: пишется уравнение кривой в приращенных координатах, в нем отбрасываются все члены выше первого измерения относительно a и e , а также члены, свободные от a , e , после чего в оставшемся уравнении a заменяется на m и e на t . Если положить $m = y$, то результат можно записать уже встретившимся нам уравнением

$$t \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Что касается обоснования, то Барроу, очевидно, принимал, опираясь на подобие треугольников TPM и MRN , конечные отрезки m , t соответственно пропорциональными бесконечно малым a , e , зависимость же между a и e ему давало уравнение

$$e \frac{\partial f}{\partial x} + a \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Сам он разъяснял, что, когда в вычислении участвует безгранично малая частица кривой, ее можно заменить подходящим образом выбранной равносильной ей (*aequipollens*) частицей касательной, т. е. NM можно трактовать и как отрезочек кривой и как отрезочек касательной. Правило сопровож-

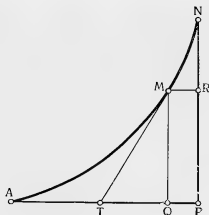


Рис. 35

дается рядом примеров на касательные: к кривой с уравнением $x^4 + x^2y^2 = r^2y^2$, введенной, согласно де Слюзу, учеником Декарта Гергардом ван Гутшофеном¹, к декартову листу, квадратрисе и еще двум линиям.

По сравнению с описанием метода касательных у Ферма и других упоминавшихся ученых его изложение у Барроу представляло еще один шаг вперед на пути алгебраизации инфинитезимальных процедур и оно было высказано в более общих терминах, чем правило Слюза. За полвека, прошедших после того как в эту область вступил Кенлер, еще далекий от самой мысли алгебраизировать свои манипуляции с бесконечно малыми, в этом направлении был пройден большой путь. Барроу стоял в самом преддверии исчисления бесконечно малых. Его обозначения были много удобнее, чем у Ферма, который, в частности, немало затруднял читателя, обозначая одинаковыми буквами концы одних отрезков и величины других. Но далее преддверия Барроу все же не пошел.

В «Лекциях» Барроу есть и другие вещи, заслуживающие упоминания, например важное неравенство ($x > 0$, целое $n > 1$)

$$(1+x)^n > 1+nx,$$

носящее теперь имя Я. Бернулли, который вновь опубликовал его в первой из своих работ по теории рядов (1689). Нам придется вернуться далее к содержащемуся в той же десятой лекции анализу взаимосвязи между задачами на касательные и на квадратуры.

Теория эволют Гюйгенса

Новый отдел инфинитезимальной геометрии плоских кривых разработал Хр. Гюйгенс. Мы говорили в начале первой главы о его многолетних занятиях часами с маятником — проблемой, которую поставил Галилей и на которую обратил внимание Гюйгенса, когда тот был еще шестнадцатилетним юношей, Мерсенн. Целью было добиться постоянного периода качания маятника независимо от начального отклонения, а этого не да-

¹ Эта линия, называемая теперь кривой каппа, определяется следующим свойством: радиус-векторы OM , проведенные к ее точкам M из начала координат, отсекают при их продолжении равные им отрезки на перпендикуляре к оси абсцисс в точке $A(r, 0)$.

Поскольку касательная к циклоиде в точке N параллельна AM (см. стр. 201), вертикальная компонента скорости точки N есть

$$\sqrt{\frac{2g}{h}} DP \frac{AL}{AM}$$

или же

$$\sqrt{\frac{g}{r}} LP,$$

в чем нетрудно убедиться, используя свойства вписанных в круг прямоугольных треугольников. С другой стороны, касательная к окружности DPA в точке P образует с диаметром DA угол, косинус которого есть $LP: \frac{h}{2}$, и поэтому точка, движущаяся по этой окружности с равномерной скоростью $\frac{h}{2} \sqrt{\frac{g}{r}}$, в положении P имеет скорость, вертикальная компонента которой есть $\sqrt{\frac{g}{r}} LP$, т. е. такая же, как у точки N на циклоиде. Таким образом, точка N спустится по дуге циклоиды CA одновременно с тем, как точка P спустится по полуокружности DPA . Но время спуска точки P равно $\pi \frac{h}{2} : \left(\frac{h}{2} \sqrt{\frac{g}{r}} \right)$, т. е. $\pi \sqrt{\frac{r}{g}}$, а время свободного падения вдоль оси циклоиды BA равно $2 \sqrt{\frac{r}{g}}$, откуда и следует теорема Гюйгенса.

Чтобы применить изохронность циклоиды к часам, нужно было заставить маятник совершать циклоидальное движение. Изучая свойства этой кривой, Гюйгенс обнаружил, что нормали к данной циклоиде касаются другой, конгруэнтной циклоиды, параллельно смещенной по отношению к первой. Поэтому нерастяжимая гибкая нить определенной длины (именно $4r$), намотанная на вторую циклоиду и закрепленная в ее точке возврата, при сматывании в натянутом состоянии описывает свободным концом первую циклоиду. На этом и основано устройство циклоидального маятника: две половины арки циклоиды, имеющие общее горизонтальное основание и соединенные в точках возврата, располагаются в вертикальной плоскости выпуклостями книзу; тогда маятник, подвешенный в их общей точке и имеющий длину $4r$, будет изохронно колебаться вдоль точно такой циклоиды, точки возврата которых находятся в вершинах верхних полуарок. Таков был отправной пункт общей теории эволют, развитой в третьей части «Маятниковых часов» и далеко выходящей за пределы того, что было необходимо Гюйгенсу для решения первоначальной задачи¹.

Гюйгенс исходит из определения эвольвент (этого термина, означающего «развертывающая», он не употреблял), как линий, описываемых при развертывании нитей, натянутых на данную кривую, которую он назвал эволютой, т. е. развернутой. При этом он предполагает, что рассматриваемая эволюта изогнута в одну сторону; правда, в отдельных примерах затем встречаются и кривые с точкой перегиба, и на чертеже эвольвенты соответственно показана точка возврата, характер которой, впрочем, под-

¹ На практике часы с циклоидальным маятником себя не оправдали. При малых колебаниях период кругового маятника почти не зависит от их амплитуды.

рнее не исследуется (ср. стр. 275). Прежде всего Гюйгенс доказывает, что касательная к эволюте нормальна к эвольвенте и несколько далее, что любая ортогональная траектория касательных к данной кривой является эвольвентой последней. Далее доказаны упомянутые теоремы о циклоиде и дается новый способ ее спрямления, основанный на том очевидном обстоятельстве, что длина дуги эволюты равна длине смотанной с нее части нити (или же разности длин отрезков касательных в концах дуги, проведенных до встречи с эвольвентой). Так как согласно предыдущим построениям смотанная с полуарки циклоиды нить вытягивается на длину, равную удвоенному диаметру образующего круга, то длина всей арки равна $8r$. Такой же прием позволяет по-новому произвести спрямление полукубической параболы, которая, как показывает Гюйгенс, есть эволюта обыкновенной параболы. Затем определяются и спрямляются эволюты эллипса и гиперболы, относящиеся к кривым шестого порядка. Добавим, что в мемуаре «О центробежной силе» (*De vi centrifuga*), написанном еще до издания «Маятниковых часов», но опубликованном лишь в «Посмертных сочинениях» (*Opuscula postuma, Lugduni Batavorum, 1703*), Гюйгенс для определения направления, в котором действует эта сила, применял эвольвенту окружности.

Эти частные результаты обобщаются в XI предложении третьей части, в котором фактически вводится радиус кривизны, а эволюта выступает как геометрическое место центров кривизны или же точек пересечения бесконечно близких нормалей. Показав общий прием нахождения эволюты данной кривой, Гюйгенс для примера выводит уравнение эволюты параболы $y^2 = 2px$ в тех обозначениях, в каких оно и теперь нередко приводится в учебниках, $\frac{27}{8}pn^3 = (\xi - p)^2$. Поскольку эволюты алгебраических кривых сами алгебраические, Гюйгенс может таким образом получить сколько угодно спрямляемых алгебраических кривых. В формулировке Гюйгенса XI предложение гласит: «Построить эволюту данной кривой и показать, что каждая геометрически определенная (т. е. алгебраическая. — *Ред.*) кривая имеет также геометрически определенную эволюту, которую можно выпрямить»¹. Здесь выводы Гюйгенса основаны на явном оперировании бесконечно малыми: отрезок дуги между двумя бесконечно близкими точками данной кривой, т. е. эвольвенты, отождествляется с касательной к ней в одной из этих точек, которые можно считать «слившимися в одну», а точка, в которой пересекаются две бесконечно близкие нормали в концах этой дуги, отождествляется с точкой, в которой нормаль касается эволюты. Сама эволюта выступает при этом как место пересечений таких нормалей. Выражение, которое при этом получает Гюйгенс для отрезка нормали эвольвенты между нею и эволютой, т. е. для ее радиуса кривизны, содержит значения отрезков подкасательной t , поднормали n , отрезка нормали N и довольно громоздкое:

$$R = N \frac{(t + n) : t}{(t + n) : t - \left(1 + \frac{dn}{dx}\right)}.$$

Оно переходит в принятое теперь, если положить

$$N = y \sqrt{1 + y'^2}, \quad t = y : y', \quad n = yy'.$$

¹ Х. Гюйгенс. Три мемуара по механике, стр. 106.

Выражение радиуса кривизны в виде $ds^3 : (dx \cdot ddy)$ увидело свет в одной статье Я. Бернулли 1694 г. (см. стр. 275), а в дифференциалах абсциссы и ординаты — в «Анализе бесконечно малых» (1696) Лопиталья, который был этим обязан И. Бернулли. Братья Бернулли записали R в символах дифференциального исчисления, каждый независимо, отправляясь от результата Гюйгенса, в 1691 г. Примерко тогда же Ньютон представил R с помощью своего знака флюксии, т. е. первой производной (см. стр. 236), именно в виде

$$\frac{1 + z\dot{z} \cdot \sqrt{1 + z\dot{z}}}{z},$$

где $z = \dot{y} : \dot{x}$ и $\dot{x}$ принята за единицу; Ньютону принадлежат и сами термины «центр» и «радиус кривизны» (*centrum, radius curvaturae*). Но «Метод флюксий» Ньютона, где это изложено, был издан только в 1736 г.

Напомним, что в «Маятниковых часах» приведены — без доказательства — компланации некоторых поверхностей вращения конических сечений.

Эволюты являются огибающими нормалей эвольвенты. Другой важный в приложениях и интересный класс огибающих встретился в оптике. Это огибающие семейств отраженных или преломленных данной плоской кривой лучей, исходящих из одной точки, либо параллельных. Братья Бернулли в 1692 г. назвали первый род огибающих катакаустиками, а второй — диакаустиками: их именуют также фокальными кривыми¹. Каустиками занимался в 1682 г. и следующие годы Чирнгауз, который произвел простое и изящное спрямление катакаустики в случае параллельных лучей (доказательство тут же сообщил Лейбниц). Гюйгенс в «Трактате о свете» (1690) решил ту же задачу для диакаустик, исходя из того, что они суть эволюты ортогональных траекторий семейства преломленных лучей. Это сочинение было написано в 1678 г., и возможно, что беседы, которые вел Чирнгауз с Гюйгенсом в следующем году, сообщили толчок его занятиям фокальными кривыми.

Весь описанный цикл работ по инфинитезимальной геометрии — определение касательных и точек перегиба, исследование кривизны линий, учение об эволютах, первые примеры огибающих — вошел составной частью в дифференциальную геометрию, как только были заложены первые начала дифференциального исчисления.

Связь между проблемами квадратур и касательных

Для нас взаимно обратный характер операций дифференцирования и (неопределенного) интегрирования непосредственно вытекает из их определения, так же как взаимно обратный характер сложения и вычитания или возведения в степень и извлечения корня. Если определенный интеграл вводится как предел интегральной суммы, то его связь с понятием

¹ Каустика, собственно, и значит фокальная кривая (*καυστικός* — сжигающий, жгучий; *κατα* и *βά* — соответствующие предлоги).

дифференциала устанавливается теоремой о дифференцировании интеграла по верхнему пределу. Пока не были созданы такие общие понятия и операции исчисления бесконечно малых, зависимость между двумя основными типами инфинитезимальных задач отнюдь не была столь прозрачно ясной. Математики подходили к ее установлению разными путями, отталкиваясь от частных задач, и различные выражения, которые получала у них эта зависимость, были вначале весьма далеки от привычных нам аналитических формулировок.

Конечно, даже в простейших задачах на квадратуры и касательные парабол высшего порядка взаимно обратный характер соответствующих результатов и вычислений должен был бросаться в глаза.

Квадратура парабол ставила в соответствие функции x^m (ординате) функцию $x^{m+1}/(m+1)$ (площадь), а определение касательных к ним ставило в соответствие функции $x^{m+1}/(m+1)$ (ординате) функцию x^m (отношение ординаты к подкасательной). В решении первой задачи основной операцией, до предельного перехода, было суммирование, во второй — вычитание. Однако обстоятельства, очевидные для того, кто знаком с исчислением бесконечно малых, не были столь очевидными в годы, когда исчисление лишь подготавливалось: во всяком случае не сразу стало ясным их значение.

Другим примером, в котором выступала связь того же рода, служили обратные задачи на касательные. Занимаясь задачей Дебона о кривой, удовлетворяющей — в наших обозначениях — уравнению $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{b}$, Декарт встретился с вопросом о методе, обратном методу касательных. Как уже говорилось, он не верил в существование общего приема, обратного его правилу касательных или же приему Ферма (см. стр. 163). Но два момента его рассуждений весьма примечательны. Во-первых, сначала он попробовал решить задачу, выясняя, удовлетворяют ли условию задачи функции (кривые) $y^n = ax^2 + bx + c$. Это было равносильно проверке дифференцированием, имеются ли решения в классе функций указанного вида. Во-вторых, заменой переменных он свел дело к уравнению $\frac{dy'}{dx} = \frac{-y'}{b\sqrt{2}}$,

т. е. к квадратуре. Правда, сам Декарт не отметил последнего факта и построил свое приближенное решение на других соображениях. Но он вообще не углублялся далеко в область инфинитезимальной математики, лишь при случае доказывая силу своего гения на решении предлагаемых ему друзьями и недругами вопросов. Те же ученые, которые систематически работали в этой области, естественно, стремились привести обратные задачи на касательные к квадратурам, получавшим все более широкое признание. И достаточно было Лейбницу в письме от 27 августа 1676 г., направленном Ньютоном через Ольденбурга, упомянуть, что он решил задачу о кривой с постоянной подкасательной, как Ньютон в ответе от 24 октября откликнулся замечанием, что определение этой кривой зависит от квадратуры гиперболы.

К механическому или геометрическому представлению зависимости между дифференцированием и интегрированием подходили Торричелли, Менголи, Дж. Грегори и Барроу. В «Общей части геометрии» (1668) Грегори выразил эту зависимость, сопоставляя спрямление произвольной кривой с построением подкасательной к некоторой другой подходящей линии. В более удобном виде это же вскоре сделал Барроу в XI предложении десятой из своих геометрических лекций (1670).

иллюстрирует это примером равномерно ускоренного движения, в котором верхней кривой оказывается парабола $y = gx^2/2$, а соответственной нижней — прямая $z = gx$.

Второе доказательство, геометрическое, мы приведем, близко следуя Барроу. Примем, что ординаты DE нижней кривой возрастают. Из точки I , которая берется сначала слева, а затем справа от точки F , проводятся отрезки IL параллельно оси и IPG перпендикулярно к ней. Обозначим K точку пересечения прямых TF и IL . Так как $LF : LK = DF : DT$ и по условию $DL : DT = DE : R$, то $LF \cdot R = LK \cdot DE$. Вместе с тем $LF \cdot R = \text{пл. } PDEG$, так что $LK \cdot DE = \text{пл. } PDEG$. Смотри по тому, находится ли точка I слева или справа от L , пл. $PDEG$ оказывается меньше или соответственно больше, чем $IL \cdot DE$, а значит, KL меньше IL или соответственно KL больше IL . Поэтому верхняя кривая $VIFI$ лежит вся по одну сторону от прямой TF , причем обращена выпуклостью к оси. Значит прямая TF есть касательная к кривой VIF в точке F . В случае убывания ординат нижней кривой доказательство аналогично, только верхняя кривая обращена тогда к оси своей вогнутостью. Все это можно распространить на кусочно монотонные кривые $VGEK$, причем у кривой $VIFI$ появляются точки перегиба. Сам Барроу исходил из традиционного понимания касательной.

Доказанную теорему можно выразить (полагая $R = 1$) и следующим образом: из уравнения $y = \int_0^x z dx$ следует дифференциальное равенство

$dy = z dx$. Этот результат по существу содержится в ходе рассуждений Барроу. Ведь приращение площади нижней кривой, т. е. пл. $PDEG$, равно приращению ординаты верхней кривой, т. е. LF . Если мыслить точку I неограниченно близкой к точке F , характеристический треугольник KLF — бесконечно малым и криволинейную трапецию $PDEG$ — прямоугольной, то равенство $LF = \text{пл. } PDEG$ заменяется на $dy = z dx$. Мы видели, что инфинитезимальные соображения были руководящими для Барроу в задаче о построении касательной с помощью характеристического треугольника. Так же обстояло дело и в данном выводе, которому Барроу лишь в заключительном изложении придал форму точных неравенств. Доказывая в XIX предложении одиннадцатой лекции ту же теорему в обратном порядке, т. е. переходя от дифференциального равенства

$dy = z dx$ к интегральному $y = \int_0^x z dx$, Барроу ограничился выводом с по-

мощью бесконечно малых: и в этом случае, как он писал, утверждение является достаточно ясным.

Упомянем, что замечания Барроу о направлении вогнутости кривой в скрытом виде содержат известные дифференциальные признаки, основанные на увеличении или уменьшении значения первой производной $y' = z$.

В переводе на язык нового анализа теорема Барроу и родственные ей теоремы его предшественников выражали взаимно обратный характер вычисления интеграла с переменным верхним пределом и дифференцирования. Однако это стало ясным ученым того времени лишь после того, как Ньютон и Лейбниц аналитически определили операции интегрирования и дифференцирования, причем само определение уже показывало существующую между ними связь. Вообще «Лекции по геометрии», не-

смотря на достигнутую Барроу общность в трактовке ряда основных предложений и приемов анализа и многие интересные примеры, не оказали широкого влияния. Одной из причин была громоздкая форма изложения, решительно устаревшая символика и недостаточное применение алгебраических средств, быть может воспринятое у итальянских математиков. К тому же еще до появления книги Барроу в Англии началось распространение гораздо более мощного и удобного метода флюксий Ньютона, а вскоре после ее выхода Лейбниц приступил к разработке дифференциального и интегрального исчисления. В обоих случаях «Лекции по геометрии» были далеко превзойдены и в идейном, и в формальном отношении. Это позволяет нам пройти мимо отдельных оригинальных приложений, которые получила у Барроу его теорема в нескольких частных задачах, как для определения касательных с помощью известных квадратур, так и для решения обратных задач на касательные путем сведения их к квадратурам.

ВОСЬМАЯ ГЛАВА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Накануне создания нового исчисления

За пятьдесят лет после выхода в свет трудов Непера и Кеплера инфинитезимальная математика сделала значительные успехи. В интеграционных задачах на первое место выдвинулось суммирование бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых, были найдены приемы замены переменных, проинтегрированы, не считая степенной функции, некоторые иррациональные и трансцендентные функции, — мы далеко не полностью перечислили эти интеграции, иногда очень остроумные. Понятие квадратуры до некоторой степени исполняло роль определенного и неопределенного интеграла.

В дифференциальных задачах было выявлено единство приемов их решения, которые сводились к разысканию бесконечно малых разностей величин и их отношений, было сформулировано несколько формальных правил, равносильных дифференцированиям. Операции предельного перехода и действия с бесконечно малыми, необходимые в обоих случаях, были осознаны как новые виды действий, специфические для нового анализа. Становилась ясной взаимозависимость между обоими классами задач. Как основное средство аналитического выражения функций начинали употреблять бесконечные степенные ряды.

Однако, сколь ни значительны были блестящие открытия в инфинитезимальной математике, сделанные Кавальери и Торричелли, Декартом и Ферма, Робервалем и Паскалем, Валлисом и Барроу, Брунckerом и Меркатором, они не составляли ни каждое в отдельности, ни все взятые вместе исчисления бесконечно малых. В них не было единой системы отправных общих понятий, подчиненных определенным правилам оперирования, и единой символики, обеспечивающей механическое осуществление этих операций. Исчисление бесконечно малых, в котором отыскание экстремумов и касательных, нахождение радиусов кривизны, квадратуры, спрямления, кубатуры, вычисление скорости и пути, решение обратных задач на касательные и т. д. являются приложениями немногих вычислительных алгоритмов, действительных для весьма обширных подклассов или даже для всего класса аналитических функций, еще разработано не было.

Создание такого оперативного исчисления было заслугой двух величайших умов XVII в. — Ньютона и Лейбница.

Исаак Ньютон

Английский математик, механик и физик Исаак Ньютон (1643—1727) родился в фермерской семье в деревне Вулсторп, примерно в 75 км к северу от Кембриджа. После нескольких лет занятий в школе соседнего городка Грантема Ньютон летом 1661 г. поступил в колледж св. Троицы — Тринити колледж Кембриджского университета. В 1665 г. он окончил его со степенью бакалавра, в 1668 г. стал магистром, а год спустя по предложению Барроу занял его кафедру. В университете Ньютон читал лекции по физике и математике: о его курсе алгебры говорилось ранее. Он не женился; члены колледжа, следуя средневековой традиции, оставались холостяками.

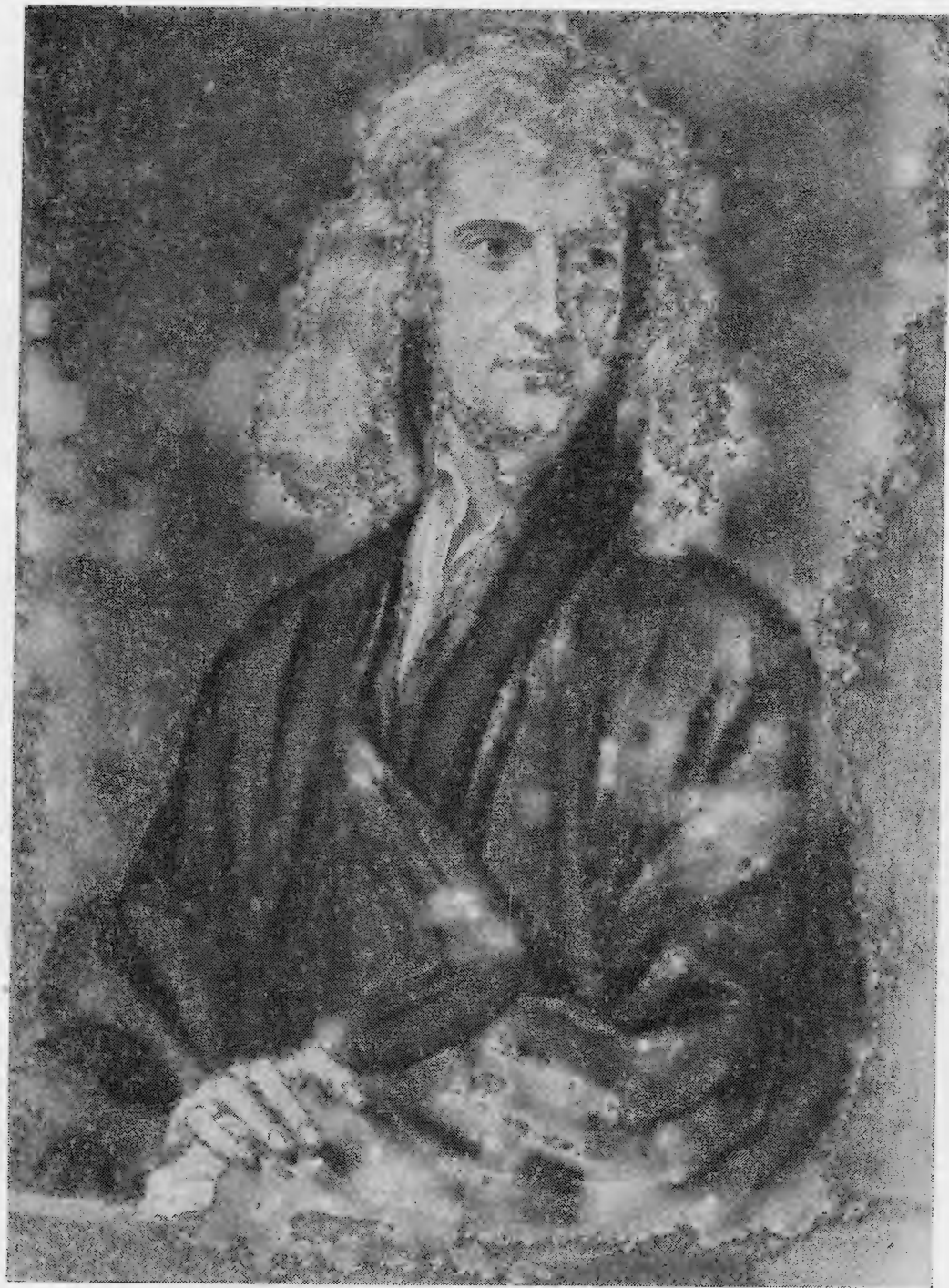
1664 год и два или три последующих года оказались решающими в духовном развитии Ньютона. Изучая геометрию по Евклиду¹, алгебру с приложениями по Виету, Отреду и Декарту, инфинитезимальную математику по Валлису, Ньютон одновременно знакомился с современными ему достижениями в механике, астрономии и физике. В математике особенное влияние на него оказали труды Декарта и его последователей, включенные во второе латинское издание «Геометрии», а также валлисова «Арифметика бесконечных». Об этом со всей ясностью свидетельствуют недавно опубликованные черновые записи Ньютона, содержащие выписки из сочинений названных авторов, решения многочисленных задач, доказательства теорем, различные собственные замечания и дополнения, переходящие затем в изложение новых открытий самого Ньютона.

Судя по этим записям, в области математических наук Ньютон был преимущественно самоучкой. Во всяком случае, курс математики, который читал в 1664—1666 гг. в Кембридже Барроу, имел совершенно элементарный характер по сравнению с изучавшейся тогда Ньютоном литературой, — этот курс не следует смешивать с рассмотренными нами в предыдущей главе «Лекциями по геометрии»². Вообще о влиянии Барроу на Ньютона мы не располагаем точными данными. В рукописях Ньютона, о которых идет речь, упоминаний о Барроу нет. Неизвестно, какие лекции Барроу посещал Ньютон, неизвестно, беседовали ли они в то время на научные темы. Вероятно все же, что Ньютон был обязан Барроу общей концепцией образования математических переменных величин и геометрических фигур посредством движения (см. стр. 204). Употребив здесь слово «вероятно», мы поступили, как сам Ньютон, в 1743 г. писавший: «В том же (1665.— *Ред.*) году я выяснил кое-что относительно метода моментов и флюксий. И вероятно, что лекции д-ра Барроу могли повести меня на рассмотрение образования фигур с помощью движения, хотя я теперь и не помню этого»³. Из черновых записей видно, что главное внимание Ньютона было тогда устремлено на разработку аналитической геометрии и анализа, включая теорию рядов, с применением декартовой алгебры. Эти направления математической мысли, синтез которых привел Ньютона к методу флюксий, остались во многом чуждыми Барроу.

¹ По изданию Барроу, в котором доказательства были сокращены и упрощены: Euclidis Elementorum libri XV breviter demonstrati, Opera Is. Barrow, Cantabrigiae, 1655.

² Читавшиеся Барроу в Кембридже лекции по математике были изданы посмертно (Lectioes Mathematicae XXIII, Londini, 1687).

³ См. «The Mathematical Papers of Isaac Newton», v. I, p. 41; ср. там же, стр. 150.



Исаак Ньютон
(с портрета Г. Кнеллера 1689 г. Собственность графа Портсмутского)

Конечно, круг чтения Ньютона не ограничивался сказанным, и, например, он изучал, нередко из вторых рук, Аполлония. Рукописи показывают также, что он быстро овладел античными формами доказательства. Однако забота о точности определений, о полноте выводов, характерная для позднейших работ Ньютона, в заметках, составленных для самого себя, естественно, не проявляется. Зато здесь особенно отчетливо видно, что молодой Ньютон в полной мере оценил эвристические достоинства инфинитезимальных приемов и индуктивных поисков. Изучение чужих работ медленно побудило Ньютона к собственным исследованиям.

Уже ранней осенью 1664 г. Ньютон начал прокладывать собственные пути в различных направлениях. Зимой 1664—1665 г. он открыл носящее теперь его имя общее разложение степени бинома. За несколько месяцев, с весны по осень 1665 г., он разработал принципы метода флюксий, отчетливо выразил взаимно обратный характер операций интегрирования и дифференцирования, регулярно записывая в параллельных столбцах интегралы и производные, и применил свое исчисление к целому ряду задач. В октябре 1666 г. он подготовил первое систематическое изложение этих результатов в черновом наброске, который стал известным отдельным ученым еще в ту пору, но напечатан был только триста лет спустя. Название этой рукописи гласит: «Следующие предложения достаточны, чтобы решать задачи с помощью движения» (*To resolve Problems by Motion these following Propositions are sufficient*)¹: черновики для своего употребления Ньютон писал по-английски, между тем как работы, предназначенные к печати, — по-латыни. В эти же годы созрели основные идеи механики Ньютона, в частности мысль о единстве силы тяготения, управляющей падением земных тел и движением тел небесных. Проверка гипотезы всемирного тяготения, обратное пропорционального квадрату расстояния, на движениях Луны не дала в то время убедительных результатов, так как Ньютон не располагал достаточно близким к истинному значением земного радиуса, и к этой проблеме он вернулся позднее. Наконец, в те же годы, стремясь усовершенствовать зрительную трубу, Ньютон интенсивно занимался оптикой, открыл дисперсию света, сам усердно шлифовал линзы и в 1668 г. построил первый рефлектор. Все эти вопросы, как мы знаем, волновали и современников Ньютона. К мысли о законе всемирного тяготения независимо от него пришли Рен и Роберт Гук (1635—1703), не сумевшие, впрочем, построить небесную механику. Оптикой занимался Барроу, а о построении рефлектора размышлял Дж. Грегорий. Мы называем лишь английских ученых, с которыми Ньютону пришлось в то время установить контакты либо лично, либо через Коллинса.

Летом 1669 г. Ньютон передал Барроу «Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов», содержавший сжатое изложение некоторых наиболее важных его открытий в исчислении бесконечно малых, учении о бесконечных рядах и решении с помощью рядов числовых и буквенных алгебраических уравнений. Барроу переслал это сочинение, написанное Ньютоном с несомненной целью закрепить права на свои открытия, в Лондон Коллинсу и благодаря последнему оно получило некоторую известность в Англии и за ее пределами. Возникшая было мысль издать «Анализ» в приложении к «Лекциям по оптике и геометрии» Барроу (1670) осуществлена не была: возможно, что этого не желал сам Ньютон. Вместо того Ньютон стал готовить к печати более полный труд, известный под назва-

¹ Напечатано в «The Mathematical Papers of Isaac Newton», т. I, стр. 400—448.

нием «Метода флюксий и бесконечных рядов», которое ему позднее дал его первый издатель Колсон (первая страница рукописи Ньютона до сих пор не обнаружена и мы не знаем, какое в точности заглавие намечал он сам). «Метод флюксий» Ньютон готовил в течение 1670—1671 гг.: в нем он дал подробное и систематическое изложение своего исчисления бесконечно малых, а также его приложений. Однако найти издателя «Метода» не удалось; математические книги, как правило, приносили убыток. В результате Ньютон не закончил книгу и, в частности, не написал предполагавшийся раздел об определении центров тяжести фигур. Рукопись осталась у Ньютона, который нередко пользовался ею сам, а также давал ее читать некоторым английским математикам. После неудачи с изданием «Метода флюксий» Ньютон надолго отказался от намерения публиковать свои математические работы — скорее всего, чтобы не втянуться в полемику, которую могли вызвать его инфинитезимальные приемы. Ньютон избегал, сколько мог, острых споров. Он был душевно легко ранимый человек, а между тем ему пришлось вступить в полемику при первом же его контакте с более широкими научными кругами. В конце 1671 г. Ньютон передал Королевскому обществу новый экземпляр зеркального телескопа и в январе 1672 г. был избран его членом; вскоре он представил еще работу по теории света и цветов. Гук выступил против нее с некоторыми возражениями, а за ними последовали другие печатные и письменные критические замечания, в том числе со стороны Гюйгенса и Пардиса. Все это крайне угнетающе действовало на Ньютона, и в письмах 70-х годов он не раз заявлял о своем намерении впредь ничего не печатать, чтобы не потерять покой. В результате все математические сочинения Ньютона были изданы лишь после того, как имя его приобрело мировую славу, а сам он, бессменный президент Королевского общества с 1703 г., стал, по крайней мере у себя на родине, непрекращаемым научным авторитетом. Из трудов по анализу первым было издано «Рассуждение о квадратуре кривых» (*Tractatus de quadratura curvarum*), опубликованное вместе с «Оптикой» и «Перечислением кривых третьего порядка» в Лондоне в 1704 г., но подготовленное в самом начале 90-х годов. «Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов» (*Analysis per aequationum numero terminorum infinitas*) был напечатан более чем сорок лет спустя после его составления (Лондон, 1711), а «Метод флюксий и бесконечных рядов» (*Methodus Fluxionum et serierum infinitarum*) ждал издания шестьдесят пять лет, причем сначала вышел в английском переводе Дж. Колсона (*The method of fluxions and infinite series*, London, 1736).

Столь позднее издание трудов Ньютона по исчислению бесконечно малых, естественно, ограничивало распространение его открытий, особенно за пределами Англии. Это особенно относится к «Методу флюксий». Все же немалое число ученых знакомились с рукописями Ньютона у него дома, а многие открытия его распространялись посредством переписки. В 1676 г. по просьбе Лейбница он изложил в двух больших письмах, пересланных через Ольденбурга, свои главные результаты в учении о рядах: о методе флюксий, однако, он сообщил только в двух анаграммах, образованных из расположенных в порядке алфавита букв, принадлежащих следующим трем фразам: «По данному уравнению, содержащему сколько-либо флюент, найти флюксии и обратно»¹ и «Один метод состоит в нахождении флюенты из уравнения, заключающего вместе с ней и ее флюксию».

¹ И. Ньютон. Математические работы, стр. 262.

Другой же заключается в употреблении вместо какой-либо неизвестной величины ряда, из которого можно удобно вывести остальные, и в сопоставлении однородных членов результирующего уравнения для определения членов взятого ряда»¹. Например, первая анаграмма (письма были на латыни) имела вид: $\text{baccdac13eff7i319n4o4qrr4s9t12vx}$. Впрочем, из этих заявлений многого извлечь было бы нельзя, даже если бы Ньютон их высказал открыто. Лишь после того, как стали появляться статьи Лейбница по дифференциальному и интегральному исчислению, Ньютон резюмировал свой метод в письмах к Валлису от 27 августа и 17 сентября 1692 г., а Валлис поместил выдержки из них в латинском издании своего «Трактата по алгебре» (*De Algebra Tractatus; historicus of practicus*, Oxoniae, 1693). Здесь были расшифрованы обе приведенные анаграммы. Еще ранее Ньютон включил целый ряд предложений теории пределов в «Математические начала натуральной философии» (*Philosophiae naturalis principia mathematica*, Londini, 1687). Впрочем, и этот труд Ньютон завершил и опубликовал только по настоянию своего друга Э. Галлея.

В 1696 г. Ньютон был назначен хранителем Лондонского монетного двора, а в 1699 г. — его директором и на этой работе проявил выдающиеся административные способности. В Англии тогда обращалось много неположенных и фальшивых монет, хорошие же монеты припрятывались или переправлялись за границу. Финансовое хозяйство страны было в расстроенном состоянии. Ньютон организовал чеканку новых денег более совершенного образца и содействовал укреплению английской валюты. С 1696 г. Ньютон жил в Лондоне и пост директора Монетного двора сохранял до смерти. С 1703 г. он, как сказано, руководил также деятельностью Королевского общества. Научная активность Ньютона стала меньшей, но время от времени он обращался к решению отдельных трудных задач, а в 1709—1712 гг. отдал много сил подготовке нового, исправленного и дополненного издания «Математических начал» (Лондон, 1713), главную тяжесть которого взял на себя талантливый кембриджский профессор Роджер Коутс.

На старости лет, по иронии судьбы, Ньютону пришлось вступить в долгий спор с Лейбницем о приоритете в открытии исчисления бесконечно малых. Начало спору в 1699 г. положили, правда, не сами Ньютон и Лейбниц, но вскоре они приняли в нем деятельное участие. Острая и пристрастная полемика, в которую вовлечено было много ученых, испортила немало крови Ньютону и Лейбницу и оба они далеко отошли от первоначальной высокой оценки взаимных заслуг. Печальным последствием этого спора, разросшегося до размеров международной распри, явились отказ английских математиков от применения алгоритма Лейбница и его учеников и невнимание многих математиков континента Европы к достижениям школы Ньютона. Так продолжалось более ста лет.

В последний период жизни Ньютон с особым увлечением занимался вопросами богословия и античной хронологии, включая библейские сказания. Подобно Неперу, Ньютон, бывший протестантом, решительно атаковал римскую церковь и папство. Но в вопросах религии Ньютон не придерживался ортодоксальных взглядов и принадлежал к деистам. За богом он признавал создание мира, как выразился Ф. Энгельс, «первый толчок», но запретил всякое дальнейшее вмешательство в свою сол-

¹ И. Ньютон. Математические работы, стр. 259.

печную систему»¹. Самый протестантизм Ньютона носил весьма рационалистический характер, профессор колледжа св. Троицы отвергал — про себя — догмат о триединстве Бога и божественную природу Христа.

Ньютон скончался, окруженный почетом, на 85-м году жизни. Краткая эпитафия на памятнике в Вестминстерском аббатстве, где он похоронен, заканчивается словами: «Пусть радуются смертные, что существовало такое украшение рода человеческого». Соотечественник Ньютона поэт А. Поп выразил восхищение современников двумя стихами:

Nature and Nature's laws lay hid in night,
God said, let Newton be: and all was light.

(Природа и законы природы скрывались в ночной тьме. Бог сказал: да будет Ньютон! и наступил свет). Но сам Ньютон был очень скромным человеком. Как рассказывают, незадолго до кончины он говорил: «Не знаю, чем я могу казаться миру, но сам себе я кажусь мальчиком, играющим на морском берегу и развлекающимся тем, что время от времени он находит более блестящий камешек или более красивую ракушку, чем обыкновенно, между тем как весь великий океан истины лежит передо мной неисследованным»²

Ньютон и математическая физика

В развитии науки Нового времени исключительную роль сыграли ньютоновы «Математические начала натуральной философии» (на фотографии (см. стр. 223) воспроизведен титульный лист первого издания этого сочинения). Мы можем сказать лишь несколько слов об этом сочинении, основополагающем в развитии рациональной механики, математической физики и шире — всего математического естествознания. В предисловии к первому изданию труда Ньютон характеризовал не только главное его содержание, но и более далекие цели, которые ставил перед наукой. Он писал: «...сочинение это нами предлагается как математические основания физики. Вся трудность физики, как будет видно, состоит в том, чтобы по явлениям движения распознать силы природы, а затем по этим силам объяснить остальные явления. Для этой цели предназначены общие предложения, изложенные в книгах первой и второй. В третьей же книге мы даем пример вышеупомянутого приложения, объясняя систему мира, ибо здесь из небесных явлений, при помощи предложений, доказанных в предыдущих книгах, математически выводятся силы тяготения тел к Солнцу и отдельным планетам. Затем по этим силам, также при помощи математических предложений, выводятся движения планет, комет, Луны и моря. Было бы желательно вывести из начал механики и остальные явления природы, рассуждая подобным же образом, ибо многое заставляет меня предполагать, что все эти явления обуславливаются некоторыми силами, с которыми частицы тел, вследствие причин покуда неизвестных, или стремятся друг к другу и сцепляются в правильные фигуры, или же взаимно отталкиваются и удаляются друг от друга. Так как эти силы неизвестны, то до сих пор попытки философов объяснить явления природы и остава-

¹ Ф. Энгельс. Диалектика природы, стр. 171.

² J. Spence. Anecdotes, observations and characters of books and men. 2^d ed. London, 1858, p. 40.

лись бесплодными. Я надеюсь, однако, что или этому способу рассуждения, или другому более правильному, изложенные здесь основания доставят некоторое освещение»¹. Таким образом, Ньютон надеялся на возможность механико-математического объяснения всех естественных явлений.

«Математические начала» явились отправным пунктом всего дальнейшего прогресса математического естествознания. В Англии они были приняты без возражений, но на материке Европы механика Ньютона восторжествовала только после нескольких десятилетий идейной борьбы. Особенно упорными противниками ее выступили картезианцы, которые не могли ни принять действия на расстоянии (Ньютон не дал физического объяснения механизма всемирного тяготения), ни примириться с разрушительной критикой, которой было подвергнуто декартово учение о потоках эфирных вихрей, в которых как бы плывут планеты, обращающиеся вокруг Солнца. Господствовавшие в Парижской академии наук картезианцы выбрали в 1699 г. Ньютона ее иностранным членом, но закрыли двери перед его идеями. Кроме того, некоторые расхождения видимого движения Луны с теоретически вычисленным еще долго вызывали сомнения в правильности самого закона всемирного тяготения. Только в середине XVIII в. система механики Ньютона восторжествовала окончательно. Этому особенно содействовали, как мы увидим, Л. Эйлер и принадлежавшие к новому поколению французских ученых Мопертуйи, Клеро и Даламбер, а также блестяще популяризовавший идеи Ньютона Вольтер.

По своей структуре «Математические начала» замечательно синтезировали новые экспериментальные методы и аксиоматический метод древних. Первые примеры употребления аксиоматики вне геометрии — в статике дал еще Архимед, в XVI в. также поступил Стевин. Ньютон впервые аксиоматически построил обширную систему механики. Он подчеркивал при этом, что принятые исходные принципы подтверждаются многочисленными опытами. Начинает Ньютон с восьми определений — количества материи, количества движения, различного рода сил, а затем формулирует три аксиомы, или закона, движения. Первая из них есть закон инерции, третья — закон равенства действия и противодействия. Вторым законом Ньютона гласит: «Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует»². Это не что иное, как словесное выражение основного уравнения динамики материальной точки, которое в дифференциальной форме стали писать со времен Эйлера (1736) и которое теперь часто пишут в векторной форме

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}.$$

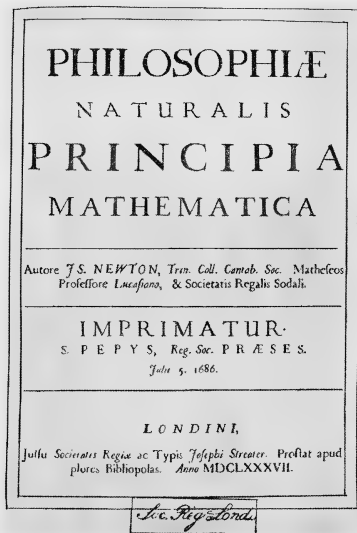
Из законов движения выводятся шесть следствий — о параллелограмме сложения сил, о движении центра тяжести системы точек и др., — и затем на этой основе последовательно развивается длинная цепь многочисленных предложений общей и небесной механики. Ньютон при этом не ограничился изучением движения точки в пустоте или сопротивляющейся среде, но и решил ряд задач теории притяжения твердых тел, а также механики жидкостей.

¹ И. Ньютон. Математические начала натуральной философии, стр. 3.

² Там же, стр. 40.

Будучи в первую очередь трудом по механике, «Математические начала» богаты и собственно математическим содержанием. Нам приходилось уже говорить о некоторых включенных в них предложениях геометрии и теории конечных разностей. Помимо того, в книге в весьма широком объеме используются инфинитезимальные приемы, но не в форме метода флюксий, с помощью которого Ньютон предварительно получил многие, хотя далеко не все, результаты своей механики. Изложение механики на языке флюксий в 80-е годы XVII в. вряд ли было удобно. Еще не имелось книги, по которой можно было изучать новое исчисление, а предварительное его разъяснение в составе «Начал» воздвигло бы серьезные трудности. Перед изучением нелегких идей и теорем новой механики читатель должен был бы преодолеть тяжелый барьер новых и спорных математических понятий, новой символики, новых правил и т. д. Более того, метод флюксий не был тогда настолько развит, чтобы обойтись в механике только

Титульный лист первого издания «Математических начал» И. Ньютона (экземпляр библиотеки Лондонского Королевского общества)



его средствами. Через некоторое время положение вещей радикально изменилось. Когда исчисление бесконечно малых укрепились, стало возможным — и возникла настоятельная потребность — изложить систему механики на его языке, что и выполнил с блестящим успехом Л. Эйлер (1736).

В соответствии со сказанным, Ньютон применяет в «Математических началах» конкретные геометрические инфинитезимальные приемы, которым стремится придать возможно большую строгость и тем самым убедительность. Эти приемы основаны на нескольких доказанных в начале I книги леммах о пределах отношений интегральных сумм, аппроксимирующих площади геометрических фигур, и о пределах отношений неограниченно уменьшающихся дуг и отрезков: во II книге добавляется еще правило дифференцирования произведения и степени (см. стр. 243). Теорию конических сечений Ньютон применяет в синтетической форме, по мере необходимости дополняя античный запас теорем новыми, принадлежащими ему самому. Аналитико-геометрические методы не употребляются.

Инфинитезимальные конструкции и расчеты «Математических начал» содержат ростки важных понятий и методов, впоследствии широко обобщенных в рамках анализа бесконечно малых. В качестве одного из примеров укажем на теорию притяжения сферических тел в 12-м отделе I книги, где в предложениях 70—78 определяется притяжение внутренней или внешней точки однородным простым сферическим слоем или же однородной либо неоднородной сферой, а также взаимное притяжение двух неоднородных сфер¹. Производимые при этом разбиение фигур на элементы и вычисление интегральных сумм равносильны вычислению двойных интегралов по поверхности и тройных — по объему. Между тем общее понятие о таких интегралах ввели только Эйлер и Лагранж.

Другим примером могут служить многочисленные задачи на определение движения под действием тех или иных сил в соответствии со вторым законом Ньютона. Мы приводим такие задачи к интегрированию дифференциальных уравнений. Укажем, в частности, на 8-е и 9-е предложения второго отдела II книги о прямолинейном подъеме или спуске тяжелой точки в однородной среде при сопротивлении, пропорциональном квадрату скорости. Дифференциальное уравнение движения будет

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g \pm \frac{1}{g} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2$$

или

$$\frac{dv}{dt} = g \pm \frac{1}{g} v^2,$$

где z — расстояние движущейся точки от начальной на вертикальной прямой, $v = \frac{dz}{dt}$ — скорость, t — время и g — ускорение силы тяжести, причем $z = 0$ соответствует точке, в которой $v = 0$. Ньютон представляет все геометрически в виде соотношений между отрезками, изображающими

¹ В неоднородном случае плотность рассматривается как функция расстояния от центра сферы, т. е. на каждой сферической поверхности с тем же центром она постоянна.

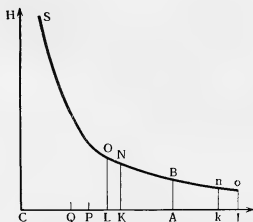


Рис. 38

силы, скорости и их приращения за весьма малые промежутки времени. Эти отрезки наносятся на горизонтальные оси: на рис. 38

$$AC = g, \quad Ak = \frac{v^2}{g}, \quad Ck = g + \frac{v^2}{g},$$

$$AP = v, \quad PQ = dAP = dv \quad \text{и} \quad kl = dAk = \frac{2}{g} v dv.$$

Один из результатов Ньютона состоит в представлении пути z как функции скорости v . Перепишав $\frac{dv}{dt}$ в виде

$$\frac{dv}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{v dv}{dz},$$

так что переменные разделяются, мы, интегрируя, находим

$$z = \pm \frac{g}{2} \ln \left(1 \pm \frac{v^2}{g^2} \right).$$

Ньютон также сводит дело к квадратуре, но геометрической, изображая путь площадью $ABnK$ (или $ABNK$) равносторонней гиперболы с центром в точке C и асимптотами CA и CH , абсциссы которой суть $g + \frac{v^2}{g}$ (или $g - \frac{v^2}{g}$). Доказательство его заключается в проверке решения с помощью его дифференцирования, причем попутно применяется правило дифференцирования степени, доказанное непосредственно перед тем. Тут же устанавливается, что действующая сила выражается относительно z показательной функцией или, как пишет сам Ньютон, если взять все части пройденного пространства равными, то действующие силы составляют геометрическую прогрессию. Наконец, время подъема или падения выражается в функции скорости. Нашим интегралам

$$t = \int_0^v \frac{dv}{g \pm \frac{1}{g} v^2},$$

¹ Это в случае подъема. В случае спуска $Ck = g - \frac{v^2}{g}$ и т. д.

т. е. арктангенсу и логарифмической функции, у Ньютона соответствуют квадратуры кругового и гиперболического секторов.

Конечно, дело не ограничивается задачами, которые мы записываем дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными и которые непосредственно приводятся к квадратурам. Так, задача о прямолинейном движении в случае притягивающей силы, пропорциональной расстоянию до центра притяжения, требует отыскания функции, являющейся решением линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -n^2z$$

(38-е предложение I книги) ¹, а задача о движении тяжелой точки по циклоиде при сопротивлении, пропорциональном квадрату скорости, выражается линейным относительно v^2 уравнением

$$\frac{v dv}{ds} + ns = \pm mv^2,$$

где s — длина дуги циклоиды, в функции которой и находится v^2 (29-е предложение шестого отдела II книги) ². Во многих этих случаях инфинитезимальные выводы в главной своей части облечены в геометрическую форму.

С аналитической записью дифференциальных уравнений и аналитическими приемами их решения мы встречаемся у Ньютона только в сочинении о методе флюксий (см. стр. 246).

Мы сказали, что Ньютон был математиком, механиком, физиком. Что же преобладало в его творчестве? Ответ на этот вопрос связан не столько с хронологией его занятий и объемом тех или иных работ, сколько с общей установкой изысканий, которая нашла выражение в первых же фразах предисловия к первому изданию «Математических начал»:

«Так как древние, по словам Паппа, придавали большое значение механике при изучении природы, то новейшие, отбросив субстанции и скрытые свойства, стараются подчинить явления природы законам математики.

В этом сочинении имеется в виду тщательное развитие приложений математики к физике» ³.

Как справедливо заметил переводчик цитируемого труда на русский язык академик А. Н. Крылов, по современной терминологии заглавие этой книги ближе всего передается словами «Математические основания физики». Разумеется, Ньютон был как математиком, притом аналитиком, геометром и алгебраистом, так и физиком, притом экспериментатором и теоретиком, механиком и оптиком, а кроме того конструктором. Но непосредственной целью его как ученого было создание математи-

¹ Впрочем здесь нет ни приема решения этого уравнения, ни проверки ответа дифференцированием. Решение получается почти непосредственно из 10-го предложения (если тело обращается по эллипсу, то центростремительная сила, направленная к его центру, пропорциональна расстоянию точки от центра; отрезок рассматривается, как выродившийся эллипс).

² В этом случае решение, как сказали бы мы, есть сумма линейной и показательной функции.

³ И. Ньютон. Математические начала натуральной философии, стр. 1.

ческой физики, и главным образом для этого он разрабатывал математический аппарат.

Характерно почти полное отсутствие интереса у Ньютона к задачам теории чисел, а также, что в его глазах «геометрия основывается на механической практике и есть не что иное, как та часть *общей механики*, в которой излагается и доказывается искусство точного измерения»¹. Характерна, наконец, и его механическая трактовка понятий анализа, о которой уже упоминалось и будет еще сказано далее.

Исчисление бесконечно малых Ньютона

Уже в рукописях 1664—1666 гг. метод флюксий Ньютона выступил со всеми своими главными особенностями, а именно как алгоритм, основанный на:

- 1) дифференцировании (прежде всего степенной функции),
- 2) понимании интегрирования как действия, обратного дифференцированию, и

3) разложении функций в степенные ряды.

Именно применение степенных рядов и твердая уверенность в том, что любая функция может быть представлена таким рядом, сообщали в глазах Ньютона (так же как Лейбница) его методу характер универсального оперативного исчисления, наподобие алгебраического. Аналогию с алгеброй Ньютон особенно подчеркивал и ею оправдывал употребление самого слова «анализ», которое Виет ранее применил к алгебре. «Все, чего обычный анализ достигает (когда это возможно) при помощи уравнений с конечным числом членов, здесь всегда достигается при помощи бесконечных уравнений. И я не колеблюсь употреблять и здесь термин: *анализ*. Действительно, рассуждения в нем не менее достоверны, чем в первом, и уравнения не менее точны, хотя мы, люди конечного ума, и не в состоянии ни обозначить, ни воспринять все их члены так, чтобы точно узнать из них искомые величины»². В другом месте он сравнивал степенные ряды и их роль в инфинитезимальном анализе с десятичными дробями и их ролью в арифметике и алгебре: «И так же, как десятичные дроби обладают тем преимуществом, что выраженные в них обыкновенные дроби и корни приобретают в некоторой степени свойства целых чисел, так что с ними можно обращаться как с последними, так и буквенные бесконечные ряды приносят ту пользу, что всякие сложные выражения (дроби с составным знаменателем, корни составных величин или неявных уравнений и т. д.) можно с их помощью привести к роду простых количеств; именно... к бесконечному ряду дробей, у которых числители и знаменатели суть простые члены, и, таким образом, с небольшой затратой сил удается преодолеть трудности, в другом виде представляющиеся почти неодолимыми»³. Не удивительно, что в своих трудах по анализу Ньютон уделял столь важное место приближенному решению уравнений, особенно методу параллелограмма (ср. стр. 232).

¹ И. Ньютон. Математические начала натуральной философии, стр. 2.

² И. Ньютон. Математические работы, стр. 21.

³ Там же, стр. 25—26.

Разложения в бесконечные ряды

Одним из первых открытий Ньютона в учении о рядах явилось разложение степени бинома, найденное зимой 1664/65 г. О нем Ньютон довольно подробно рассказал во втором письме к Ойленбургу для Лейбница от 24 октября 1676 г. Изучая «Арифметику бесконечных» Валлиса, Ньютон также занялся интерполированием площадей кривых

$$y = (1 - x^2)^{n/2},$$

но только, в отличие от своего предшественника, который рассматривал последовательности, соответствующие интегралам с постоянными пределами

0 и 1, он проинтерполировал последовательность интегралов $\int_0^x (1 - x^2)^{n/2} dx$ с переменным верхним пределом x для $n = 0, 2, 4, 6, \dots$, т. е. последовательность

$$x, \quad x - \frac{1}{3}x^3, \quad x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5, \quad x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7, \dots$$

Обнаружив здесь, что коэффициенты вторых членов $\frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \dots$ следуют в арифметической прогрессии, а также общий закон образования коэффициентов¹, он распространил его на нечетные значения $n=1, 3, 5, \dots$,² а от этого перешел к интерполированию самой функции

$$y = (1 - x^2)^{n/2}$$

и затем

$$y = (1 - x^2)^m$$

при любом m . Так был установлен общий мультипликативный закон коэффициентов биномиального разложения для любого действительного показателя

$$(1 + x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

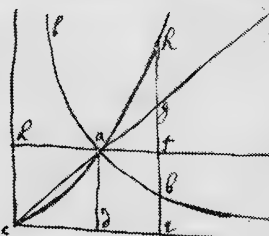
На фотографии (стр. 229) воспроизведена страница из черновых записей Ньютона, относящихся, вероятно, к осени 1665 г., т. е. из самых ранних по данному вопросу³. Наверху выведено разложение в степенной ряд площади $adeb$ ($cd = 1$, $de = x$) гиперболы lab с уравнением $y = 1/(1 + x)$, иными словами $\ln(1 + x)$, в виде $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$. Этот результат

¹ Именно, знаменатели следуют в арифметической прогрессии 1, 3, 5, 7, ..., а числители получаются при последовательном перемножении чисел последовательности $\frac{m-0}{1}, \frac{m-1}{2}, \frac{m-2}{3}, \frac{m-3}{4}, \dots$ где m — числитель второго коэффициента.

² Например, при $n = 1$, $m = \frac{1}{2}$ соответствующая площадь кругового сегмента есть

$$x - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{16}x^7 - \frac{5}{128}x^9 - \dots$$

³ Фотография этой страницы помещена перед титульным листом в «The Mathematical Papers of Isaac Newton», v. I; там же на стр. 122—126 напечатан ее текст.



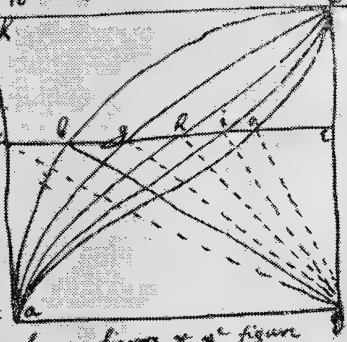
If lab is an Hyperbola; de its Asymptotes, a is vertex, & cag is axis; If $adch$ is a square ab is 11 ad is 1 de is x . y is $1/x$. If also $bf=1$. $eg=1+x$ $ah=1+x^2$ ch the progression continued $1+x^2+x^3+x^4$ $1+x^2+x^3+x^4+x^5$ $1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$ &c. Then, shall all areas of those lines proceeding this progression. $*=adch$ $x=adef$ $x+\frac{x^2}{2}=adg$ $adch+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}$ &c.

Ch in this table. In each first area y also inserted. The composition of wth table may be deduced from hence; viz: The sum of any figure & figure above it is equal to y^2 figure following &c. it. By wth table it may appear y^2 area of y^2 Hyperbola $adcb$ is $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^8}{8}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{10}}{10}$ &c.

x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144	1048576
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125	9765625
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696	60466176
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5781343	40353607	282475249
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728	1073741824
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	389418225	3508518129
10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000	10000000000

Suppose y & $adch$ is a square abc a circle age a Parabola. &c. & y & de is a square ad de is 1 de is 1 de is 1 &c.

y & y^2 progression in wth y^2 lines $fe, fg, gh, hi, ie, ie, &c.$ proceeds is $1, \sqrt{1-x}, 1-xx, 1-xx^2, 1-xx^3, 1-xx^4, 1-xx^5, 1-xx^6, 1-xx^7, 1-xx^8, 1-xx^9, 1-xx^{10}$ &c. Then will their areas $feab, fgad, ghac, hiea, ieab, &c.$ be in this progression. $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^8}{8}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{10}}{10}$ &c. as in this table following in each intermediate terms are inserted. The property of which table is y^2 figure above it is equal to y^2 figure next after it save one. Also y^2 progression are of these forms.



x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144	1048576
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125	9765625
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696	60466176
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5781343	40353607	282475249
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728	1073741824
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	389418225	3508518129
10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000	10000000000

Where y^2 calculation of y^2 intermediate terms may be easily performed. The area $adcb$ depends upon y^2 & ad Collume 1. $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ &c. (wth progression may be continued at pleasure by y^2 help of this rule $\frac{0x1x-1x2x-2x3x-3x4x-4x5x-5x6x-6x7x-7x8x-8x9x-9x10x}{0x2x4x6x8x10x12x14x16x18x}$ &c.) Whence it may appear y^2 what ever y^2 sine $de=x$ is, y^2 area $adcb$ is $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^8}{8}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{10}}{10}$ &c. (If y^2 area $adcb$ is $\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}+\frac{x^8}{8}+\frac{x^9}{9}+\frac{x^{10}}{10}$ &c.) Whence also y^2 area & angle $adcb$ may be found.

The same may be done this y^2 areas $adcb, adcb, adcb, &c.$ as in this progression $\frac{0x1x-1x2x-2x3x-3x4x-4x5x-5x6x-6x7x-7x8x-8x9x-9x10x}{0x2x4x6x8x10x12x14x16x18x}$ &c. Ch in this following table

x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144	1048576
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125	9765625
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696	60466176
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5781343	40353607	282475249
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728	1073741824
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	389418225	3508518129
10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000	10000000000

By wth it may be perceived y^2 $adcb = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{6}x^5 + \frac{1}{7}x^6 + \frac{1}{8}x^7 + \frac{1}{9}x^8 + \frac{1}{10}x^9$ &c. And by this means having y^2 area $adcb$, (wth y^2 angle $adcb$ given) y^2 sine of y^2 angle $adcb$ may be found.

Coroll: If y^2 $adcb = x$ & y^2 $adcb = 16$. y^2 $adcb$ is an Hyperbola. &c. area $adcb$ is $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}+\frac{x^8}{8}+\frac{x^9}{9}+\frac{x^{10}}{10}$ &c.

получен интерполированием. Квадратуры кривых $y = (1+x)^n$ при $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ представлены в верхней таблице; для этого величины в первом столбце, т. е. $x, x^2/2, x^3/3$ и т. д., умножаются на соответствующие числа в параллельных столбцах таблицы биномиальных коэффициентов, и произведения складываются. Второй столбец множителей, соответствующий $n = -1$, таков, что сохраняется аддитивное свойство элементов таблицы: сумма какого-либо элемента и стоящего под ним дает элемент справа от последнего. Напомним, что Меркатор получил разложение $\ln(1+x)$ по-другому и опубликовал его в 1668 г. (см. стр. 161). Далее следуют квадратуры площадей *fade, babe, gade* кривых $y = (1-x^2)^{n/2}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, причем $ad = ak = dc = 1$, $af = de = x$; они сведены в таблице в середине страницы. Значению $n = 1$, т. е. площади кругового сектора, соответствует пятый столбец множителей, на которые надлежит умножать величины из первого столбца. Наконец, внизу выведено разложение в ряд площади кругового сектора adb как разности площадей кругового сектора $adeb$ и треугольника deb , иными словами, разложение арксинуса

$$\frac{\arcsin x}{2} = \int_0^x \sqrt{1-t^2} dt - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{80}x^5 + \frac{5}{224}x^7 + \dots$$

Сам Ньютон в первом письме к Ольденбургу для Лейбница от 13 июня 1676 г. записал биномиальное разложение в виде

$$P + PQ \mid^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \\ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \text{и т. д.}$$

«Здесь $P + PQ$ обозначает величину, для которой следует найти корень, или степень, или корень из ее степени: P — первый член этой величины, Q — совокупность остальных членов, деленных на первый. Далее m/n есть числовой показатель степени $P + PQ$, причем либо целой, либо (как я буду говорить) дробной, либо положительной, либо отрицательной. Именно, совершенно так же, как аналитики обычно вместо aa, aaa и т. д.

пишут a^2, a^3 и т. д., и я вместо $\sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[5]{a}$ пишу $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{1}{5}}$ и т. д., а вместо $\frac{1}{a}, \frac{1}{aa}, \frac{1}{aaa}$ пишу a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} »¹.

Не имея средств доказать справедливость найденного разложения в общем виде, Ньютон проверил его (с нашей точки зрения, чисто формально) на отдельных примерах; с помощью возведения в квадрат ряда для $(1-x^2)^{1/2}$, извлечения квадратного корня $\sqrt{1-x^2}$ по правилам алгебры и возведения в куб ряда для $(1-x^2)^{1/3}$. В XVIII в. было предложено немало доказательств формулы бинома Ньютона, иногда весьма интересных по идее, но неполноценных, так как оставлялась в стороне проблема сходимости. Полное исследование условий сходимости биномиального ряда в комплексной области дал Н. Г. Абель (1826).

В «Анализе с помощью уравнений» обобщенной формулой бинома Ньютон не воспользовался и здесь производил разложения в ряды при помощи формально-алгебраических операций: неограниченного деления

¹ И. Ньютон. Математические работы, стр. 218.

многочлена на многочлен, в частности ряда на ряд, и извлечения корней. Например, спрямление дуги эллипса, приведенное к интегрированию функции $\frac{\sqrt{1+ax^2}}{\sqrt{1-bx^2}}$, он произвел, разложив сначала в ряды оба квадратных корня, затем поделив числитель на знаменатель и, наконец, почленно проинтегрировав частное¹. Так в форме бесконечного ряда был впервые выражен эллиптический интеграл

$$\int \frac{\sqrt{1+ax^2}}{\sqrt{1-bx^2}} dx = x + \left(\frac{1}{6}b + \frac{1}{6}a\right)x^3 + \left(\frac{3}{40}b^2 + \frac{1}{20}ab - \frac{1}{40}a^2\right)x^5 + \dots$$

Располагая разложением величины y в ряд по степеням x , Ньютон умел обратить ряд, т. е. найти разложение x по степеням y . Комбинирование этих и некоторых других приемов доставляло новые разложения. Мы ограничимся одним примером из того же «Анализа с помощью уравнений». Прежде всего из характеристического треугольника для окружности $y^2 = 1 - x^2$ длина дуги $s = \arcsin x$ выражается интегралом

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ так что}$$

$$s = \arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \dots$$

или

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots$$

Обращение ряда, т. е. разложение $x = \sin s$, производится на основе метода неопределенных коэффициентов в соединении с методом последовательных приближений. Берется такое же число членов данного ряда, сколько хотят найти в обращенном, скажем три:

$$s = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5,$$

и полагается

$$x = As^\alpha + p,$$

причем p предполагается выраженным через высшие степени s . Тогда показатель α подбирается так, чтобы после подстановки x в первое уравнение получились по крайней мере два члена одинаковой степени, меньшей, чем остальные, а коэффициент A так, чтобы эти члены взаимно уничтожились. В данном случае, очевидно, $\alpha = 1$ и $A = 1$, и при подстановке получим

$$0 = p + \frac{1}{6}(s^3 + 3s^2p + \dots) + \frac{3}{40}(s^5 + \dots).$$

Если теперь положить

$$p = Bs^6 + q,$$

¹ Для упрощения выкладок Ньютон рекомендует еще сначала избавиться от радикала в знаменателе. О постоянном интегрировании см. стр. 235—236.

то из тех же соображений определяется $\beta = 3$ и $B = -1/6$ и второе уравнение перейдет в такое:

$$0 = q + \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2} s^5 + \dots \right) + \frac{3}{40} (s^5 + \dots).$$

Далее можно аналогично взять $q = Cs^r + r$ и т. д. и в конце концов возникает степенной ряд для синуса:

$$x = \sin s = s - \frac{1}{6} s^3 + \frac{1}{120} s^5 - \frac{1}{720} s^7 + \dots$$

или

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Это тот же процесс, который привел Ньютона к методу параллелограмма и который был обобщением его приема численного решения алгебраических уравнений.

После этого по формуле

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

Ньютон получил ряд

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Обращая ряд для

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Ньютон выразил показательную функцию

$$e^x - 1 = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots,$$

впрочем, он не употреблял еще символа e^x .

Во втором письме к Ольденбургу для Лейбница Ньютон привел формулы обращения рядов с буквенными коэффициентами. Если

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \dots,$$

то

$$x = \frac{1}{a} y - \frac{b}{a^3} y^2 + \frac{2b^2 - ac}{a^5} y^3 + \frac{5abc - 5b^3 - a^2 d}{a^7} y^4 + \dots$$

Если же

$$y = ax + bx^3 + cx^5 + dx^7 + \dots,$$

то

$$x = \frac{1}{a} y - \frac{b}{a^4} y^3 - \frac{3b^2 - ac}{a^7} y^5 + \frac{8abc - a^2 d - 12b^3}{a^{10}} y^7 + \dots$$

Ньютон проявляет заботу о сходимости получаемых разложений. Он даже пытается доказать, что при достаточно малом x разность между корнем уравнения (в том числе с бесконечным числом членов) и его последовательными приближениями, т. е. величина, которую он обозначает последовательно $p, q, r, \dots$, всегда становится меньше всякой данной величины и, как он выражается, совершенно исчезает при бесконечном про-

должении действия. Приводимые им соображения недостаточны. Сначала он рассматривает бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем $x \leq 1/2$, затем указывает, что в других случаях числовые коэффициенты рядов по большей части непрерывно убывают, а к этому добавляет: «В случае же, если бы они начали возрастать, достаточно предположить x еще в несколько раз меньше»¹.

Как упоминалось, Ньютон применял также разложения в ряды по дробным и отрицательным степеням аргумента. К вопросу об употреблении рядов при решении дифференциальных уравнений мы обратимся далее.

Флюенты, флоксии и моменты

Простая в своих принципах структура исчисления бесконечно малых Ньютона отчетливо выражена в «Анализе с помощью уравнений», часть содержания которого мы только что рассмотрели. В этом труде приведены всего три правила. Первое правило имеет предметом квадратуру простых

кривых: если $y = ax^{m/n}$, где m, n — целые числа, то площадь есть $\frac{an}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$. При $m/n > 0$ имеется в виду квадратура площади от начала координат до ординаты точки (x, y) , т. е. наш интеграл $\int_0^x y dx$ с переменным верхним пред-

делом. При $m/n < -1$ (примеры $y = x^{-2}$ и $y = x^{-3/2}$) имеется в виду квадратура пространства между кривой и еею абсцисс (асимптотой) справа от

ординаты точки (x, y) , т. е. наш несобственный интеграл $\int_x^\infty y dx$; однако,

так как Ньютон вычисляет в действительности только первообразную функцию (в его примерах $-x^{-1}$ и $-2x^{-1/2}$), то площадь при вычислении получается отрицательной. Наконец, в случае $m/n = -1$ имеется в виду любая неограниченная часть площади между гиперболой и асимптотой, и этим объясняется результат $\frac{1}{0} x^{0/1} = \infty$. Примеров, в которых $-1 < m/n < 0$, здесь нет.

Второе правило относится к квадратуре «сложных кривых с помощью простых» и выражает аддитивное свойство интеграла в конкретном случае суммы нескольких степенных функций. Специально указано, что площади, лежащие под осью абсцисс, выражаются отрицательными числами.

Последнее, третье, правило служит для квадратуры всех остальных алгебраических кривых, для чего их ординаты выражаются суммами бесконечных степенных рядов, «причем действовать над буквами следует совершенно таким же образом, как действуют в арифметике, когда делят, извлекают корни или решают уравнения, пользуясь десятичными дробями»². Примеры таких разложений рациональных, иррациональных и невязных алгебраических функций уже приводились.

Метод квадратур, разработанный для алгебраических кривых, переносится и на трансцендентные, — Ньютон вслед за Декартом говорит

¹ И. Ньютон. Математические работы, стр. 23.

² Там же, стр. 5.

о геометрических и механических линиях. Это поясняется прежде всего на квадратуре циклоиды, для чего используется уже упоминавшееся ее свойство (см. рис. 36 на стр. 207), записываемое уравнением $LN = LM + \widetilde{AM}$. Если принять $AB = 1$, $AL = x$, $LN = y$, то

$$LM = \sqrt{x - x^2} = x^{1/2} - \frac{1}{2} x^{3/2} - \frac{1}{8} x^{5/2} - \frac{1}{16} x^{7/2} - \dots$$

а дифференциал дуги AM есть $\frac{dx}{2\sqrt{x-x^2}}$, так что

$$\widetilde{AM} = x^{1/2} + \frac{1}{6} x^{3/2} + \frac{3}{40} x^{5/2} + \frac{5}{112} x^{7/2} + \dots$$

Поэтому

$$y = 2x^{1/2} - \frac{1}{3} x^{3/2} - \frac{1}{20} x^{5/2} - \frac{1}{56} x^{7/2} - \dots$$

и, следовательно,

$$\text{пл. } ANL = \frac{4}{3} x^{3/2} - \frac{2}{15} x^{5/2} - \frac{1}{70} x^{7/2} - \frac{1}{252} x^{9/2} - \dots$$

Ньютон еще производит спрямление дуги квадратрисы и заключает: «И я не знаю случаев такого рода, на которые не распространяется этот метод в его различных выражениях»¹.

Доказательство первого правила, как и некоторых других изложенных в «Анализе с помощью уравнений» приемов, — скажем, спрямления кривых, — имеет чисто инфинитезимальный характер. Оно опирается на понятие «момента» величины, как ее бесконечно малого приращения, причем подчеркивается, что по моменту можно определить и саму величину. Доказательство ведется параллельно в аналитическом и геометрическом плане. Именно, устанавливается, что ордината $BD = y$ кривой $AD\delta$ (рис. 39) с площадью

$$ABD = z = \frac{na}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$$

есть $y = ax^{m/n}$ (напомним, что m/n — рациональная дробь). Пусть x возрастает бесконечно убывающий или исчезающий момент $B\beta = o$ (этим знаком Ньютон пользовался еще осенью 1664 г.²), тогда площадь увеличивается на величину $BD\delta\beta$ или на прямоугольник $BKN\beta = ov$, где v — некоторая промежуточная ордината кривой. Обозначив $na/(m+n) = c$ и $m+n = p$, Ньютон переписывает выражение для площади в виде $z^n = c^n x^p$ и подставляет в него $z + ov$, $x + o$. Затем он опускает в равенстве $z^n + novz^{n-1} + \dots = c^n (x^p + po x^{p-1} + \dots)$ члены, обозначенные многоточием, «которые

¹ И. Ньютон. Математические работы, стр. 21.

² Этот же знак и в том же смысле применил в «Общей части геометрии» (1668) Дж. Грегори и много раньше, около 1638 г., в своем изложении метода касательных Ферма французский любитель математики Жан де Богран (ум. 1640). Возможно, что употребление знака o для выражения исчезающей величины, обращающейся в ничто, было связано с тем, что она походит на маленький нуль.

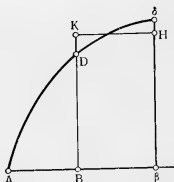


Рис. 39

в конце концов исчезают»¹, отбрасывает равные z^n и $c^n x^p$, делит на o и, заменив v равным ему (при исчезании o) y , получает $y = ax^{m/n}$.

«Поэтому и обратно, — заключает он, — если $ax^{\frac{m}{n}} = y$, то $\frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}} = z$. Что и требовалось доказать»². Так впервые был предложен читателям

аналитический вывод значения интеграла $\int_a^x x^k dx$ при $k \neq -1$ посредством дифференцирования степенной функции. Параллельное геометрическое рассуждение, не связанное с частным видом уравнения кривой $AD\delta$, содержит доказательство с помощью дифференцирования общей теоремы: площадь криволинейной трапеции есть интеграл функции, выражающей ординату кривой, по абсциссе.

Все это было совершенно новым в то время, и значение вывода Ньютона не умаляется ни тем, что он ограничился степенной функцией с рациональным показателем, ни тем, что здесь еще не был поставлен вопрос об объеме класса первообразных функций данной функции, т. е. о постоянной интегрирования.

Заметим, что аналитической формулы, которую теперь называют по имени Ньютона и Лейбница, т. е. формулы, выражающей определенный интеграл через разность значений первообразной функции при верхнем и нижнем пределах интегрирования, не было ни у того, ни у другого ученого. Она появляется только в XVIII в., причем в учебном руководстве лишь во втором томе «Трактата по дифференциальному и интегральному исчислению» (Traité du calcul différentiel et intégral, Paris, 1798) профессора Политехнической школы в Париже С.-Ф. Лакруа. Но по существу правило, выражаемое формулой Ньютона — Лейбница, было хорошо известно им обоим. Ньютон его высказал в геометрической форме вполне отчетливо, хотя и мимоходом, в одном примере «Метода флюксий и бесконечных рядов».

«Для получения должного значения площади, прилежащей к некоторой части абсциссы, — писал он, — эту площадь всегда следует брать равной разности значений z , соответствующих частям абсциссы, ограниченному началом и концом площади»³.

¹ И. Ньютон. Математические работы, стр. 22.

² Там же, стр. 23. Случай $m/n = -1$ Ньютон здесь оставляет в стороне (см. стр. 233).

³ И. Ньютон. Математические работы, стр. 121.

Из трех основных понятий исчисления бесконечно малых — интеграла, дифференциала и производной — в «Анализе с помощью уравнений» явно выделено только одно — соответствующий дифференциалу момент, понимаемый как бесконечно малая, исчезающая или же неделимая величина, например, как ордината, описывающая своим движением площадь.

В «Методѣ флюксий и бесконечныхъ рядовъ» исчисление Ньютона получило гораздо более полное развитие, причем основные понятия и задачи формулируются в механических или квазимеханических терминах. Подобно тому как геометрия в глазах Ньютона была частью общей механики, имеющей дело с точными измерениями (см. стр. 227), так и новый анализ он трактовал, по сути дела, как часть общей механики, рассматривающую движение в его наиболее абстрактном выражении. Прежде всего в терминах механики формулируются две проблемы, к которым можно свести все задачи анализа:

I. Длина проходимого пути постоянно (т. е. в каждый момент времени) дана; требуется найти скорость движения в предложенное время.

II. Скорость движения постоянно дана; требуется найти длину пройденного в предложенное время пути¹.

Для такого сведения все величины рассматриваются, подобно пути, как порождаемые в процессе непрерывного роста или убывания. Они называются флюентами, т. е. текущими величинами, причем их универсальным аргументом является время. Под «временем» здесь понимается, впрочем, не время как таковое, а любая величина, равномерное течение которой выражает и измеряет настоящее время. Флюенты тут же выступают не просто как функции «времени», но в своих взаимоотношениях со скоростями своего изменения, или флюксиями. Таким образом, двумя центральными понятиями анализа оказываются (в терминологии, которую мы применяем вслед за Лагранжем) взаимно обратные понятия первообразной и производной функции. Но и здесь ничего не говорится о многозначности операции нахождения флюенты по данной флюксии, — на это Ньютон в общей форме указал только в конце последнего своего труда по анализу — «Рассуждения о квадратуре кривых». «Всякую флюенту, получаемую по первой флюксии, — писал он здесь, — можно увеличить или уменьшить на любую не текущую величину²; в случае же, если флюента находится по какой-либо данной n -й флюксии (производной), то к ней можно прибавить любую величину, у которой равна нулю n -я флюксия. В «Методѣ флюксий и бесконечныхъ рядовъ» флюксии высших порядков еще не употреблялись.

Для исчисления флюксий Ньютон ввел специальную символику, обозначая их с помощью точек над буквами, выражающими флюенты, так что

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \dot{z} = \frac{dz}{dt},$$

где t — «время», и т. п. Однако такие обозначения Ньютон начал употреблять лишь четверть века спустя после открытия самого метода флюксий и, например, в его собственной рукописи «Метода флюксий» скорости изменения величин v, x, y, z обозначаются новыми буквами l, m, n, r . Между тем еще в 1665—1666 гг. Ньютон применял пометку букв точками для обозначения произведений частных производных функции двух переменных на некото-

¹ И. Ньютон. Математические работы, стр. 45.

² Там же, стр. 192.

рые степени переменных ¹. Впрочем, поскольку в «Метод флюксий» Ньютон явно оперировал только производными первого порядка, отсутствие специального знака дифференцирования не было особенно стеснительным. Применение символа флюксии $\dot{x}$ и ему подобных засвидетельствовано у Ньютона лишь с конца 1691 г., и, например, он объяснил его в письмах к Валлису от 27 августа и 17 сентября 1692 г., где употреблены также знаки флюксий высших порядков, как $\ddot{x}$, $\dot{\dot{x}}$, $\ddot{\dot{x}}$. Как говорилось, Валлис напечатал эти письма в 1693 г.

Две главные проблемы анализа в терминах метода флюксий гласят:

«1. По данному соотношению между флюентами определить соотношение между флюксиями». Это задача дифференцирования функции нескольких переменных, зависящих от «времени».

«2. По данному уравнению, содержащему флюксии, найти соотношение между флюентами» ². Это задача интегрирования дифференциального уравнения первого порядка.

В «Метод флюксий и бесконечных рядов» находят применение и уже встречавшиеся нам неограниченно малые моменты текущих величин, которые, как указывает Ньютон, пропорциональны их флюксиям, так что моменты величин $x, y, z, \dots$ будут соответственно $\dot{x}o, \dot{y}o, \dot{z}o, \dots$, где o — момент времени. Опираясь моментами точно так же, как в «Анализе с помощью уравнений», Ньютон на примерах учит дифференцированию целых многочленов от двух или большего числа переменных $f(x, y, z, \dots) = 0$, получая при этом для флюксий соотношения, которые можно записать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} + \dots = 0.$$

Это уравнение формально полностью соответствует уравнению в дифференциалах

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \dots = 0.$$

Поскольку Ньютон ограничивается правилами дифференцирования степенной функции и суммы или разности (последнее в силу очевидности даже не высказано), он при наличии рациональных и иррациональных функций справляется с возникающей трудностью, приравнивая их вспомогательным флюентам. Избавляясь от дробей и радикалов, он находит соотношения для флюксий всех переменных, а затем получает уравнение между флюксиями исходных флюент, исключая флюксии введенных величин. Это позволяло обойтись без особых правил для флюксий частного и функции от функции, но придавало алгоритму Ньютона в сравнении с дифференциальным исчислением значительную громозд-

¹ В черновых записях 1665 г., посвященных общей задаче проведения касательных и исследованию кривизны плоских кривых, Ньютон при дифференцировании уравнений ввел знак $\dot{a}$ для $x \frac{da}{dx}$, где a есть функция x , а также в случае уравнения

$$\mathcal{X} \equiv f(x, y) = 0 \text{ знаки } \mathcal{X} = x \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \mathcal{Y} = y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \mathcal{XY} = xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \mathcal{X}^2 = x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \\ \mathcal{Y}^2 = y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \text{ См. «The Mathematical Papers of Isaac Newton», том I, стр. 151,}$$

прим. 20, стр. 274 и 290. В дальнейшем этой символикой Ньютон не пользовался.

² И. Ньютон. Математические работы, стр. 46 и 51.

кость. Ньютон не сформулировал в своем главном труде по теории флюксий даже правила дифференцирования произведения (ср. стр. 243).

Следует заметить, что в одной рукописи, относящейся, вероятно, ко времени составления «Метода флюксий», Ньютон гораздо полнее изложил начала алгоритма дифференцирования. Этот небольшой фрагмент вообще весьма интересен¹. Он начинается с формулировки ряда аксиом, в третьей из которых утверждается, что флюксия суммы или разности равна сумме или разности соответствующих флюксий. Затем выводятся несколько десятков теорем и королляриев о дифференцировании различных алгебраических выражений и геометрических величин. Теорема I гласит, что в случае пропорции

$$A : B = C : D$$

имеет место равенство

$$A \cdot flD + D \cdot flA = B \cdot flC + C \cdot flB$$

(сокращенное обозначение флюксий в виде $fl : A$ и т. п. имеется в самом фрагменте). Отсюда, как следствия, получаются правила дифференцирования произведения, частного, степени и корня, — например, в случае частного, исходя из пропорции $A : 1 = B : (B/A)$. Ньютон вновь и совсем по-другому вывел эти правила в «Математических началах» (1687), где, однако, правило дифференцирования частного не выделено явным образом (см. стр. 243). Однако в публикации основных правил дифференцирования Ньютона на три года опередил Лейбниц (см. стр. 258).

Заслуживает упоминания, что I теорема доказана в рукописи дважды. В первом доказательстве, зачеркнутом автором, вывод основан на отбрасывании бесконечно малых членов, в другом же вычисление имеет характер предельного перехода, хотя термин «предел» и не употребляется.

Мы проследим теперь дальнейшее развитие основных понятий метода флюксий, оставляя пока в стороне его приложения.

Метод пределов Ньютона

Применение инфинитезимальных представлений было настолько эффективно, что Ньютон никогда от него не отказывался. Однако употребление бесконечно малых величин, будь то неделимые, или количества, меньшие всякого данного, или простого чрезвычайно малые, со временем начало представляться ему недостаточно строгим. По поводу постоянно употреблявшегося отбрасывания бесконечно малых слагаемых он писал: «В математических вопросах не следует пренебрегать и самыми малыми ошибками»². Для обоснования инфинитезимальных приемов и их приложений Ньютон впервые разработал общую теорию предельных переходов, которую под именем метода первых и последних отношений изложил в первом отделе I книги и втором отделе II книги «Математических начал натуральной философии». Здесь вводится и самый термин «предел» (limes). Правда, понятию предела не дается какого-либо определения или предварительного описания его основных свойств, и это ослабляет зна-

¹ The Mathematical Papers of Isaac Newton, vol. III, Cambridge, 1970, p. 328—353.

² И. Ньютон. Математические работы, стр. 168. (В нашем переводе имеются небольшие отличия от перевода Д. Д. Мордухай-Болтовского. — *Ред.*)

чение доказательств теорем о предельных переходах. Но последующие разъяснения и примеры раскрывают содержание этого понятия, которое Пьютон считал интуитивно ясным и выражающим свойства реальных величин и процессов. Весьма существенно, что изучаемые в анализе величины Ньютон мыслил как непрерывные в области их определения (за исключением отдельных точек, в которых они могут быть бесконечными) и потому как достигающие своих предельных значений, если таковые существуют; эти предельные значения могут быть и односторонними пределами (в нашей терминологии)¹.

Метод пределов в «Математических началах» изложен в двенадцати леммах, из которых одиннадцать помещены в первом отделе I книги, а одна — в первом отделе II книги.

Приведем текст 1-й леммы и ее доказательства:

«Величины, а также отношения величин, которые постоянно стремятся к равенству в продолжение любого конечного времени и которые приближаются друг к другу ближе, чем на любую данную разность, ранее конца этого времени, напоследок становятся равными.

Если ты отрицаешь это, пусть они будут в конце концов не равны и пусть их последняя разность будет D . Следовательно, они не могут подойти к равенству ближе, чем на данную разность D , в противность предположенному»².

Следующие леммы служат для применения метода пределов к измерению величин, дифференциально-геометрическим вопросам и механике. В 3-й лемме доказано равенство единице последних отношений между площадями криволинейной фигуры $AabcdE$ и вписанной и описанной около нее фигур, составленных из прямоугольников с неравными основаниями, наибольшее из которых безгранично уменьшается (во 2-й лемме разобран частный случай равных оснований). Для этого устанавливается (рис. 40, стр. 240), что разность площадей описанной и вписанной фигур меньше, чем площадь прямоугольника с основанием AF , равным наибольшему из оснований, и с высотой Aa ; эта же площадь может быть сделана меньше любой данной площади (простоты ради Ньютон ограничивается монотонной убывающей кривой). Таким образом, сумма площадей этих исчезающих (*evanescentium*) прямоугольников совпадает в пределе с площадью криволинейной фигуры.

В следствии из 4-й леммы доказано, что «если вообще две какого угодно рода величины будут разделены на одинаковое число частей и, при бесконечном возрастании числа их и уменьшении каждой из них, отношение их соответственно друг к другу, т. е. первой к первой, второй ко второй и т. д., остается постоянным, то и самые величины будут находиться в этом же отношении»³.

Доказательство приводится к рассмотренному в самой 4-й лемме частному случаю, именно к криволинейным фигурам и вписанным в них прямоугольникам, пропорциональным частям величин. 4-я лемма непосредственно вытекает из ей предшествующей.

¹ Ньютон различал первые отношения, *primae rationes* величин, процесс изменения которых начинается, и последние отношения, *ultima rationes* величин, процесс изменения которых завершается. Мы будем иногда пользоваться этой терминологией.

И. Ньютон. Математические начала натуральной философии, стр. 57. (Здесь и далее перевод нами несколько изменен. — *Ред.*)

³ Там же, стр. 59.

В «Поучении», примыкающем к леммам, метод первых и последних отношений сравнивается с другими и подчеркиваются его преимущества. «Предыдущие леммы, — пишет Ньютон, — я предпослал, чтобы избежать скучного изложения долгих доказательств приведением к нелепости по образцу древних»¹. Правда, доказательства сокращаются и по методу неделимых, но так как «допущение неделимых несколько грубо (*durior* — так выразился сам Кавальери. — *Ред.*) и потому метод этот почитается менее геометрическим, я предпочел сводить доказательства последующих предложений к первым и последним суммам и отношениям зарождающихся и исчезающих величин, т. е. к пределам сумм и отношений»².

Метод пределов дает такие же результаты, как метод неделимых, и Ньютон предупреждает, что если в дальнейшем он станет рассматривать величины, как составленные из постоянных частиц или принимать маленькие отрезки кривых за прямые, то на деле будет иметь в виду только исчезающие делимые величины и не суммы и отношения определенных частей, но всегда пределы сумм и отношений.

Вслед за тем Ньютон обращается к вопросу, который стал предметом дискуссий более чем на сто лет, — вопросу о том, как надлежит понимать отношение исчезающих величин. Эта проблема имела капитальное значение: ведь флюксии вычислялись именно как такие отношения. «Возражают, — говорит Ньютон, — что не существует последнее отношение исчезающих величин, ибо отношение величин, до того как они исчезли, не есть последнее, а если они исчезли, то нет отношения. Но на основании такого же аргумента можно утверждать, что нет последней скорости у тела, прибывающего в какое-нибудь место и перестающего двигаться, ибо до прибытия тела в это место это не последняя скорость; а когда оно уже прибыло, скорости нет. Ответ простой: ибо под последней скоростью следует разуметь ту, с которой движется тело не до прибытия в свое последнее место, когда движение прекращается, и не после, но в самый момент его достижения, т. е. именно ту скорость, с которой тело достигает своего последнего места, когда движение прекращается. Аналогично под последним отношением исчезающих величин нужно понимать отношение величин не до и не после их исчезновения, но отношение, с которым они исчезают. Подобным же образом первое отношение зарождающихся величин есть то, с которым они начинают существовать, а первая или последняя сумма есть та, с которой они начинают или перестают существовать, или же увеличиваться, или уменьшаться»³.

Таким образом, основным аргументом Ньютона была апелляция к реальности мгновенной скорости, в частности к определенной и, вообще говоря, не равной нулю скорости в момент остановки движения. Такие аналогии утратили силу в глазах ближайших поколений. Понятия анализа нуждались в обосновании, свободном от апелляции к геометрической или механической наглядности. В глазах математиков XVIII в. сама идея мгновенной переменной скорости утрачивает характер очевидного реального свойства движения тел и становится абстрактным понятием, подлежащим определению средствами анализа, между тем как ранее анализ служил только для вычисления значения скорости.

¹ И. Ньютон. Математические начала натуральной философии, стр. 68.

² Там же, стр. 69.

³ Там же.

Защита метода пределов у Ньютона не ограничивается сказанным. Могут еще возразить: если имеются последние отношения исчезающих величин, то имеются и сами последние величины и неделимые. На это Ньютон отвечает, что последние отношения, с которыми исчезают величины, суть отношения не последних величин, но только пределы, «к которым все время приближаются отношения беспрельдно (*sine limite*) убывающих величин и к которым они могут подойти ближе, чем на любую данную разность, хотя и не могут ни превзойти их, ни достигнуть их ранее, чем величины уменьшаются бесконечно»¹. Он поясняет свою мысль на бесконечно возрастающих величинах с данной постоянной разностью: их последнее отношение существует и равно единице, хотя нет самих последних или наибольших величин, имеющих такое отношение. Оставался все же вопрос, особенно беспокоивший математиков того и позднейшего времени: что же происходит с отношением, когда величины уменьшаются бесконечно? Ведь в концепции Ньютона переменные достигают своих пределов и, значит, исчезающие величины достигают нуля.

Вероятно, наиболее соответствует взглядам Ньютона такое понимание дела (которое, впрочем, у него самого не высказано со всей полнотой). Пусть для примера ищется флюксия величины x^2 , т. е. предел отношения

$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$ при $h \rightarrow 0$. Функция

$$f(h) = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h}$$

определяется написанной формулой, как непрерывная, для всех h , кроме $h = 0$, и имеет предельное значение $2x$ при $h \rightarrow 0$. Мы могли бы доопределить по непрерывности $f(h)$ при $h = 0$ и построить новую всюду определенную функцию $F(h)$, совпадающую с $f(h)$ для всех $h \neq 0$ и с ее предельным значением $2x$ при $h = 0$. Ньютон с самого начала мыслит непрерывную функцию $F(h)$, значение которой при $h = 0$ выступает, как «отношение, с которым исчезают» величины $2xh + h^2$ и h . Эйлер позднее репился перейти к открытой трактовке производных, как особого рода отношений двух нулей.

Что же такое исчезающие величины? Ньютон неоднократно подчеркивает, что их надо «мыслить, как все время беспрельдно уменьшающиеся» (*semper diminuendas sine limite*)². Казалось бы, что это наша бесконечно малая переменная величина, которую Ньютон лишь остерегается называть бесконечно малой, чтобы не смешали ее с бесконечно малыми в понимании других математиков того времени. Однако к такой трактовке исчезающей величины у Ньютона примешивается в тех же «Математических началах» и другой оттенок, когда он в первом отделе II книги вводит — в печати впервые — понятие момента величины. Указав, что он рассматривает здесь величины, как неопределенные и непостоянные (*indeterminatae et instabiles*) и как бы порождаемые постоянным движением или течением, он называет моментами их мгновенные (*momentanea*) приращения или уменьшения. «Но остерегайся, — продолжает Ньютон, — смотреть на них (т. е. на моменты. — *Ред.*), как на конечные частицы. Как только моменты становятся конечной величины, они перестают быть моментами... Их надо рассматривать как едва зарождающиеся начала

¹ И. Ньютон. Математические начала натуральной философии, стр. 70.

² Там же, стр. 70.

конечных величин. И в этой лемме рассматривается не величина моментов, но первое отношение их, как зарождающихся. То же самое получится, если вместо моментов брать либо скорости приращений и уменьшений (которые можно также именовать движениями, изменениями или флюксиями величин), либо любые конечные величины, пропорциональные этим скоростям»¹.

В приведенной цитате, в которой Ньютон впервые употребил в печати слово «флюксия», он вводит некое особое состояние или категорию «едва зарождающихся начал» конечных величин. Моменты оказываются не синонимом нашей переменной, имеющей пределом нуль (т. е. некоторого множества конечных величин), а переменными, уже не нулевыми, но еще не конечными. Во втором и третьем изданиях «Математических начал» фраза «Как только моменты становятся конечной величины, они перестают быть моментами» (и еще одна, для нас несущественная и потому не приведенная) была заменена другой: «Конечные частицы не суть моменты, но сами величины, порожденные из моментов», но в чем состоит процесс порождения и какова природа моментов, объяснено не было.

Упомянутая Ньютоном лемма — это предложение о моменте произведения величин $A, B, C, \dots$, моменты которых обозначены соответственно $a, b, c, \dots$. Прежде всего лемма доказывается для двух множителей, причем, чтобы избежать отбрасывания бесконечно малых высших порядков, которым он пользовался в других сочинениях, Ньютон образует не разность $(A + a)(B + b) - AB$, но разность

$$\left(A + \frac{1}{2}a\right)\left(B + \frac{1}{2}b\right) - \left(A - \frac{1}{2}a\right)\left(B - \frac{1}{2}b\right),$$

которая немедленно дает момент произведения в виде $Ab + Ba$. Затем лемма распространяется на любое число множителей² и любую натуральную степень, на отрицательные степени (исходя из дифференцирования тождества $\frac{1}{A^n} A^n = 1$) и на рациональные степени (если $A^{m/n} = B$, то $A^m = B^n$, и т. д.). В лемме содержалось по существу и правило дифференцирования частного, но оно не было сформулировано отдельно.

Во «Введении» к «Рассуждению о квадратуре кривых» Ньютон вновь изложил свои взгляды на основания анализа. Флюксия x^n при любом действительном показателе выводится путем вычисления последнего отношения $\frac{(x \pm o)^n - x^n}{o}$, причем числитель раскладывается в ряд по правилу бинома. Здесь о моментах величин вовсе не говорится, Ньютон оперирует только конечными приращениями и пределами их отношений. «Подобное построение анализа посредством конечных величин и исследование первых или последних отношений нарождающихся или исчезающих конечных величин согласно с геометрией древних, и я желал обнаружить, что в методе флюксий нет необходимости вводить в геометрию бесконечно малые фигуры. Можно, правда, провести анализ на каких угодно фигурах, и конечных и бесконечно малых, которые представляют себе подобными исчезающим, так же, как и на фигурах, которые в методе *неделимых* обычно считаются бесконечно малыми, но только при этом следует действовать

¹ И. Ньютон. Математические начала натуральной философии, стр. 332.

² Точно так же, как делается теперь, когда при дифференцировании произведения ABC его пишут в виде $ABC = AD$, где $D = BC$, и т. д.

с должной осторожностью»¹. Но «Введение» было написано около 1691 г., много после основного текста «Рассуждения», в котором Ньютон сохранил и «очень малую величину o » и «моменты, т. е. мгновенные одновременные приращения величин z, y, x , т. е. $o\dot{z}, o\dot{y}, o\dot{x}$ ».

Любопытно, что в заключительном «Поучении» рассматриваемого труда, добавленном, вероятно, вместе с «Введением», Ньютон приблизился к другой точке зрения на момент, сходной с современной. В современном изложении дифференциал dy функции $y(x)$, имеющей конечную производную, вводится обычно, как функция двух аргументов $x, \Delta x$, линейная относительно Δx и такая, что разность $\Delta y - dy$ бесконечно мала относительно Δx , если Δx взять бесконечно малым; говорят, что дифференциал функции есть главная линейная часть ее приращения. Из этого определения следует, что $dx = \Delta x$ и $dy = y' dx$. В XVII в., да и в XVIII в. связь и различие между понятиями приращения и дифференциала функции были далеки от ясности. Долгое время бесконечно малое приращение функции и дифференциал отождествляли и во всех предыдущих рассмотренных момент Ньютона выступал именно как бесконечно малое изменение флюенты. Во «Введении» Ньютон пишет, что флюксии относятся «почти как приращения флюент, произведенные в равные и крайне малые частицы времени, и, точнее говоря, находятся в первом отношении зарождающихся приращений»². В «Поучении» он входит в подробности, заслуживающие внимания.

Представляя себе флюенты разложенными в ряды по степеням приращения аргумента, Ньютон говорит, что их последовательные «флюксии находятся в том же отношении, что и члены (т. е. коэффициенты членов. — *Ред.*) бесконечных сходящихся рядов»³. Неизвестно, заметил ли Ньютон общую зависимость между коэффициентами разложения функции и ее производными, т. е. знал ли он ряд Тейлора. Это весьма вероятно. Однако Ньютон не сформулировал явно теорему Тейлора, как этого не сделал и Дж. Грегори (ср. стр. 166), и свое утверждение поясняет только примером разложения $f(x) = x^n$:

$$(x + o)^n = x^n + nox^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2} o^2 x^{n-2} + \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{6} o^3 x^{n-3} + \dots$$

Член $no x^{n-1}$ он называет первым приращением, или первой разностью флюенты, «которой при ее зарождении пропорциональна первая флюксия»⁴. А так как этот же член есть момент данной флюенты (правда, здесь Ньютон этот термин не употребляет), то первый дифференциал функции $df(x)$ выступает теперь как главная линейная часть ее полного — конечного или бесконечно малого — приращения $\Delta f(x) = f(x + o) - f(x)$. Впрочем эта идея не нашла у Ньютона дальнейшего развития. Последующие члены разложения Ньютон именует вторым, третьим и т. д.

¹ И. Ньютон. Математические работы, стр. 169. Необходимо сказать, однако, что и здесь (ср. стр. 240) нет теорем об общих свойствах первых и последних отношений.

Не обоснован здесь и предельный переход от выражения $\frac{(x+o)^n - x^n}{o} = nx^{n-1} + \frac{n^2-n}{2} o x^{n-2} + \frac{n^3-3n^2+2n}{6} o^2 x^{n-3} + \dots$, содержащего бесконечное

число слагаемых, к флюксии nx^{n-1} при исчезании o .

² Там же, стр. 167.

³ Там же, стр. 190.

⁴ Там же.

приращениями, или разностями, флюенты, заявляя, что вторая флюксия пропорциональна второму приращению, третья — третьему (при их зарождении) и т. д. Если записать разложение $f(x + o)$ в виде

$$f(x + o) = f(x) + C_1 o + C_2 o^2 + C_3 o^3 + \dots,$$

то утверждение Ньютона, что флюксии второго и высших порядков пропорциональны соответствующим «приращениям», «верно в том смысле, что в равенствах

$$C_1 o = of'(x), \quad C_2 o^2 = \frac{o^2}{2} f''(x), \quad C_3 o^3 = \frac{o^3}{6} f'''(x), \dots$$

коэффициенты

$$0, \quad \frac{o^2}{2}, \quad \frac{o^3}{6}, \quad \frac{o^4}{24}, \quad \dots$$

не зависят от вида функции $f(x)$ ¹. Ньютоновы «приращения» выражаются через наши дифференциалы, если положить $o = dx$, равенствами

$$C_1 o = df, \quad C_2 o^2 = \frac{1}{2} d^2 f, \quad C_3 o^3 = \frac{1}{6} d^3 f, \dots$$

Было бы более естественно назвать вторым, третьим... приращениями сами дифференциалы $d^2 f$, $d^3 f$, ... Неясно, почему Ньютон выразился в данном случае столь неудачно².

Метод первых и последних отношений привлек к себе пристальное внимание всех, кто занимался затем обоснованием математического анализа. Плодотворность замысла Ньютона создать общую теорию предельных переходов, включающую операции над исчезающими величинами, на основании понятия предела была подтверждена последующим развитием анализа. Но выяснилось это далеко не сразу. Сам Ньютон сделал в этом направлении только первые шаги. Значение выдвинутых им общих идей, доказанных им общих теорем трудно переоценить, но он не достиг, да и не мог достигнуть при тогдашнем состоянии анализа, уровня строгости, ставшего необходимым условием дальнейшего прогресса полтора-два столетия спустя. Как мы видели, в его рассуждениях место математической аргументации нередко занимало обращение к механической «наглядности», не было определено понятие предела и остались без рассмотрения многие основные свойства пределов и действий с ними. Концепция бесконечно малых величин не была однозначной и ясной. Самое разнообразие формулировок, иногда в одном и том же труде, показывает, что Ньютон оставался имп неудовлетворен. В XVIII в. теория пределов Ньютона нашла и резких критиков, считавших ее логически несостоятельной, и комментаторов, споривших о смысле отдельных ее положений, и узких адептов, требовавших полного отказа от инфинитезимальных приемов, и таких сторонников, которые развивали теорию далее в подлинно ньютоновском духе. Обо всем этом говорится в следующем томе. Однако только в 20-х годах XIX в. Коши положил начало тому глубокому и плодотворному синтезу идей Ньютона и Лейбница, который до сих пор продолжает лежать в основании математического анализа.

¹ А. Н. Колмогоров. Ньютон и современное математическое мышление. В сборнике: Московский университет — памяти Ньютона. 1643—1943. М., 1946, стр. 41.

² Это место «Поучения» дало повод Иоганну Бернулли упрекнуть Ньютона в неясном понимании флюксий высших порядков. Ньютон обошел эту критику молчанием.

Некоторые приложения флюксионного исчисления

С наибольшей полнотой Ньютон рассмотрел задачи дифференциального исчисления и дифференциальной геометрии в «Методе флюксий и бесконечных рядов». Многочисленные приемы отыскания экстремумов, касательных и нормалей, вычисления радиусов и центров кривизны в декартовых и полярных координатах, отыскания точки прямизны, т. е. точек, в которых радиус кривизны бесконечен¹, и т. д. иллюстрируются здесь большим числом примеров. В этом же сочинении произведены квадратуры и спрямления разнообразных кривых и найдены значения интегралов некоторых иррациональных функций — проблема, которая более подробно рассмотрена в «Рассуждении о квадратуре кривых». В частности, Ньютон свел интегрирование некоторых видов функций, рациональных относительно $\sqrt{ax^{2n} + bx^n + c}$, к квадратуре конических сечений. Наиболее известен его результат, относящийся к интегрированию дифференциального бинома. В письме от 24 октября 1676 г. (стр. 219) он указал, что $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ выражается алгебраически в том и, насколько ему известно, только в том случае, когда $(m + 1)/n$, или $(m + 1)/n + p$, или p суть целые положительные числа. Дальнейшее исследование интегрируемости дифференциального бинома в элементарных функциях произвели Х. Гольдбах и Л. Эйлер. Заметим, что в «Рассуждении о квадратуре кривых» Ньютон предложил знак интеграла величины z в форме $\dot{z}$, интеграла последней величины — в форме $\ddot{z}$ и т. п. Эта символика распространения не получила из-за очевидного неудобства.

В «Методе флюксий и бесконечных рядов» Ньютон привел также некоторые приемы решения дифференциальных уравнений первого порядка. Он начинает исследование этой II проблемы метода с частного примера уравнения в полных дифференциалах

$$M(x, y) \dot{x} + N(x, y) \dot{y} = 0,$$

где M и N — целые многочлены, именно с уравнения

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} - 3y^2\dot{y} + ax\dot{y} = 0,$$

и показывает, как найти (фактически зная, что $(xy)' = xy' + yx'$) его решение с помощью квадратуры, но предупреждает, что указанный прием ведет к цели не всегда. Признаком полного дифференциала Ньютон еще не располагал.

Поиски приемов решения отдельных видов дифференциальных уравнений в квадратурах Ньютона, видимо, не интересовали, и он не дал какой-либо классификации уравнений первого порядка. Общей формой решения служил у него бесконечный степенной ряд, иногда ряд по какому-либо рациональным степеням аргумента; кроме того, как упоминалось, в «Математических началах натуральной философии» некоторые уравнения решены были геометрически. При этом Ньютон, как правило, ищет частное решение, в котором постоянный член степенного ряда равен нулю (т. е. $y = 0$ при $x = 0$). Но он хорошо знал, что каждое

¹ Ньютон специально указывает, что точки прямизны необязательно определяют «противоположные изгибы» кривой, т. е. суть точки перегиба, правило нахождения которых (по экстремуму подкасательной) он дал ранее.

дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений¹. Это поясняется на примерах, а затем мотивируется тем соображением, что при произвольном изменении начала отсчета путей скорости и их взаимоотношения остаются прежними.

Разложения решений в бесконечные ряды для уравнений вида $\dot{y}/\dot{x} = f(x, y)$ получаются с помощью своеобразного метода последовательных приближений или метода неопределенных коэффициентов. Изложение выкладок заняло бы много времени, и мы приведем лишь один любопытный пример. Для уравнения

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + \frac{y}{a} + \frac{xy}{a^2} + \frac{x^2y}{a^3} + \dots$$

(в форме $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + \frac{y}{a-x}$ оно не приведено) решение по первому способу получают в виде

$$y = x + \frac{x^2}{2a} + \frac{x^3}{2a^2} + \dots$$

Этот ряд почти очевидным образом имеет сумму $\frac{a^2}{2} \frac{1}{a-x} + \frac{x-a}{2}$. Трудно думать, что Ньютон этого не заметил; конечное выражение, видимо, просто его не интересовало или же он не привел его, так как не располагал общим приемом интегрирования линейного уравнения в квадратах.

Ньютон сделал также несколько замечаний об уравнениях с тремя и большим числом переменных. Условие интегрируемости одним соотношением ему не было известно, но он понимал, что в общем случае, когда такое интегрирование невозможно, для решения достаточно принять какие-либо дополнительные уравнения между переменными; в частности, когда их три, то одно такое уравнение. Это позволяет исключить одну из переменных и ее флюксию. Так, для уравнения

$$2\dot{x} - \dot{z} + x\dot{y} = 0, \text{ или } 2dx + xdy - dz = 0$$

он вводит дополнительно уравнение $x = y^2$, после чего получает

$$x = y^2, \quad z = 2y^2 + \frac{y^3}{3}.$$

Геометрическое истолкование такого рода дифференциальных уравнений дал сто лет спустя Г. Монж.

Г. В. Лейбниц

Примерно десятью годами позднее, чем Ньютон, но независимо и другими путями пришел к созданию исчисления бесконечных малых Лейбниц. Этот десятилетний разрыв не сыграл, однако, заметной роли в судьбах обоих открытий. К тому времени, когда появилась в печати первая работа Лейбница по дифференциальному исчислению, т. е. к 1684 г., метод флюксий Ньютона оставался еще в рукописях, известных небольшому кругу преимущественно английских ученых. А к 1704 г., когда было

¹ Хотя и не ввел понятия об общем решении дифференциального уравнения.

издано «Рассуждение о квадратуре кривых» Ньютона (другие его сочинения по анализу вышли еще позднее), уже были опубликованы не только почти все основные мемуары Лейбница, но и многие важные статьи его учеников Я. и И. Бернулли, а также превосходный учебник дифференциального исчисления Г. Ф. Лопиталья. Ничего подобного для развития и распространения метода флюксий в Англии сделано не было.

В истории человечества было немного людей, столь активных в самых различных областях духовной и практической жизни, как Лейбниц. Он занимался горным делом и юриспруденцией, техникой и философией, политикой и организацией научных академий и внес большой личный вклад чуть ли не во все естественные и общественные науки, не говоря уже о математике. В истории механики имя Лейбница навсегда останется связанным с понятием живой силы, т. е. кинетической энергии, и с новой формой закона сохранения сил, в биологии и геологии — с разработкой эволюционных идей, в психологии — с одной из первых попыток проникнуть в сферу подсознания; ко всему этому он успешно занимался также лингвистикой и, по долгу службы, много времени отдавал истории.

Как политический деятель, прежде всего дипломат, Лейбниц выразил устремления передовых кругов тогдашней немецкой буржуазии, еще слишком слабой, чтобы претендовать на власть, и искавшей решения насущных задач путем компромисса с господствовавшей аристократией. Так, Лейбниц не без успеха трудился над примирением разногласий между соперничавшими немецкими государствами. И он добивался, хотя совершенно тщетно, объединения католической церкви с протестантской или по крайней мере лютеранской с реформатской. Печать компромисса лежит и на мировоззрении Лейбница, искавшего примирения веры и разума, религии и науки, принципов идеализма и материализма. Философская система Лейбница, к которой он пришел после долгих размышлений, была в главном идеалистической. Он представлял себе мир, как совокупность монад — неделимых и нематериальных субстанций, обладающих той или иной степенью чувствительности и сознания и имманентной активностью, но не взаимодействующих друг с другом. Параллелизм и согласованность в развитии монад достигаются только благодаря предустановленной богом гармонии: в этой последней находили примирение детерминизм и телеология. Что касается материи, то это, по Лейбницу, есть низшая ступень монад или, лучше сказать, своего рода их инобытие. С непрерывной материей неотделимо связаны, как порядки ее существования, пространство и время, без материи немислимые. Но в учении о материи, в физике Лейбниц твердо занимает позиции механизма: все материальные явления надлежит объяснять с помощью движения в пространстве.

В теории познания Лейбница преобладала рационалистическая струя. Он отличал всеобщие и необходимые «истины разума», например, арифметические, выводимые априори и чисто логически, от «истин факта», которые устанавливаются эмпирически и для нас лишены внутренней необходимости. Для познания первых требуется прежде всего логический закон противоречия. При изучении вторых основным является принцип достаточного основания, т. е. выяснение оснований или причин, почему данное явление происходит именно так, а не каким-либо иным образом. Но для божественного разума истины факта столь же необходимы, как истины разума, и различие между ними стирается. В философии религии Лейбниц надеялся достичь примирения несовершенства мира с идеей



Готфрид Вильгельм Лейбниц

(с гравюры М. Бернигерота, 1703 г.). Латинское двестишие гласит: если (высшая) мудрость скрыла что-либо от разума, дошедшего до сути всего, то потому, что сама этого не знала (Лейбниц, впрочем, был недоволен этой подписью, находя ее богохульной.— Прим. ред.)

всёблагодати его творца, отстаивая положение, что если наш мир и не во всем хорош, то он наилучший из возможных, мир наименьшего зла. Вольтер в своем «Кандиде» зло высмеял этот квазиоптимизм Лейбница.

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716) родился в семье профессора морали Лейпцигского университета. Далекие предки этого рода были, видимо, славянского происхождения, а сама фамилия Лейбниц этимологически восходит к славянскому названию одной луговой травы «липище», от которого пошли названия многих поселений и рек Польши, Чехословакии и некоторых районов Баварии и Саксонии. В 1664—1666 гг. Лейбниц изучал в университетах Лейпцига и Пены философию и юриспруденцию, а в Альтдорфе в 1666 г. защитил диссертацию на степень доктора юридических наук. В том же году вышло его сочинение по комбинаторике, о котором говорилось ранее (стр. 85). В студенческие годы сильное впечатление произвело на Лейбница изучение натурфилософии Декарта; он заинтересовался и математикой. Но ни в Лейпциге, ни в Пене не было ученых, которые могли бы направить занятия молодого человека в этой области по правильному пути.

Отказавшись от академической карьеры, предложенной ему университетом Июренберга, Лейбниц вскоре поступил на службу майнцского курфюрста. С дипломатическим поручением курфюрста он прибыл в 1672 г. в Париж, где провел, с небольшими перерывами, несколько лет. Здесь он сблизился с учеными, группировавшимися вокруг Академии наук, и здесь же смог обсудить с тогдашним президентом Академии — Гюйгенсом свои первые самостоятельные поиски в теории бесконечных рядов. Во время кратковременной поездки в Лондон в начале 1673 г. Лейбниц установил контакты и с английскими учеными и продемонстрировал им еще не вполне завершенную модель счетной машины, которую построил, ознакомившись с арифмометром Паскаля. По предложению Ольденбурга Королевское общество избрало Лейбница своим членом, хотя многие англичане нашли его знания поверхностными, а самого его только дилетантом. К этому имелись в то время все основания. Только по возвращении в Париж Лейбниц всерьез приступил к изучению новой математики. И здесь большую роль сыграли беседы с Гюйгенсом. В поразительно короткий срок Лейбниц изучает труды Декарта и его последователей, Кавальери, Григория Сен-Венсана, Фабри, Паскаля, Гюйгенса, Валлиса, Дж. Грегори и несколько позднее Барроу. Правда, некоторые сочинения он лишь просматривал, но для такого читателя, как Лейбниц, и беглого ознакомления с книгой бывало достаточно, чтобы возбудить творческую работу его собственной мысли. Вскоре Лейбниц далеко углубился в самостоятельные изыскания и к осени 1675 г. выработал принципы и символику дифференциального и интегрального исчисления. Мы несколько раз упоминали об обмене в следующем году письмами между ним и Ньютоном через посредство Ольденбурга. Из этих писем Лейбниц узнал много интересных подробностей об открытиях Ньютона, но основными идеями и методами исчисления бесконечно малых он к этому времени уже владел сам. Отметим, что открытие исчисления бесконечно малых Лейбницем — редкий пример сравнительно позднего раскрытия математического гения. Лейбницу было тогда уже 29 лет, а инфинитезимальными проблемами он всерьез занялся всего тремя годами ранее.

В 1676 г. Лейбниц поступил на службу к герцогу ганноверскому. Официальными обязанностями его были заведование герцогской библиотекой в Вольфенбюттеле и составление истории дома Гвельфов, но помимо

того он был герцогским советником по вопросам экономики, финансов, внешних сношений, народного просвещения и т. д. Вместе с тем Лейбниц продолжал научные и философские занятия, а кроме того, вел колоссальную переписку с Чирнгаузом, Гюйгенсом, братьями Бернулли, Лопиталем и многими другими учеными. В 1700 г. при содействии своей ученицы, дочери ганноверского герцога Софии-Шарлотты, вышедшей замуж за прусского государя, он организовал Академию наук в Берлине и стал ее первым президентом; в том же году он был избран иностранным членом Парижской академии наук. Имя его пользовалось известностью во всем ученом мире. С 1697 г. Лейбниц поддерживал письменные отношения с русским правительством, которому представил ряд проектов о распространении образования и наук в России. Царь Петр несколько раз беседовал с ним по этим вопросам и специально об основании Академии наук в Петербурге при свиданиях в Торгау, Карлсбаде, Дрездене и Пирмонте в 1711—1716 гг.

Старость Лейбница была омрачена спором о приоритете в открытии исчисления бесконечно малых, все обострившимся и получившим широкую общественную известность. С третьим из ганноверских герцогов, при которых ему довелось служить, отношения создались холодные, а это отражалось и на отношении к Лейбницу придворных кругов. Наконец, одинокого Лейбница — он не был женат — стали одолевать различные недуги. Когда этот великий человек умер на семьдесят первом году жизни, смерть его прошла почти незамеченной в стране, которую он прославил своими открытиями и для которой многое сделал на служебном посту. На могильной плите в полу ганноверской церкви, где он похоронен, высечены два простых слова: *ossa Leibnitii* — мы бы сказали: «прах Лейбница».

Учение о всеобщей характеристике

Кажется, не было области математики, которая ни интересовала бы Лейбница. Теория чисел и алгебра, комбинаторика и теория вероятностей, математическая логика и машинная математика, геометрия и анализ бесконечно малых — в каждую из этих дисциплин он внес оригинальный вклад. По при всей широте диапазона в математических исследованиях Лейбница обнаруживается глубокое единство, определявшееся тем, что он десятилетиями стремился к одной цели — созданию универсального математического или, если угодно, метаматематического метода познания.

Мысль о «всеобщей науке», которую он называл также «комбинаторной характеристикой» или «всеобщей характеристикой», возникла у Лейбница еще в молодые годы. Мы знаем, что в этом он имел предшественников. Рамон Люлло в Средние века проектировал машину, автоматически производящую открытия посредством комбинирования элементарных понятий. Декарт создавал свою всеобщую математику как алгебраический метод познания всего, что относится к порядку и мере. Некоторые ученые XVII в., как профессор математики Иохим Юнг (1587—1657), желали построить логику наподобие математического исчисления и указывали на недостаточность аристотелевой силлогистики. Всеобщая характеристика, согласно замыслу Лейбница, должна была стать единым алгоритмом всех формализованных наук, опирающимся на разветвленный аппарат символической логики.

Все понятия надлежит свести к немногим простым понятиям, образующим как бы алфавит мышления, а каждому простому следует поставить во взаимно однозначное соответствие его знак, «характер». Греческое слово *Χαρακτήρ* означает форму и существо вещи, ее признак, характер и т. п. «Характеры, — писал Лейбниц, — суть какие-либо вещи, с помощью которых выражаются взаимоотношения других вещей и употребление которых легче, чем последних»¹. Сложные идеи и предложения выражаются по определенным правилам комбинациями начальных простых понятий, т. е. формулами и уравнениями, образованными из характеров; рассуждения заменяются преобразованиями формул и уравнений. Так в принципе, по мнению Лейбница, может быть осуществлена полная формализация мышления, преобразование его в регулярное исчисление, для которого нет неразрешимых задач. Если, мечтал Лейбниц, между учеными возникнут разногласия, то им достаточно будет взять в руки перья, сесть за расчеты и сказать друг другу: начнем вычислять (*calculamus*)!

Теперь мы знаем, что мечта об универсальном логическом алгоритме, позволяющем доказать или опровергнуть всякое предложение любой формализованной науки, неосуществима; алгоритмы — могучее, но все же не всемогущее средство исследования. Это не умаляет исторической роли идеи Лейбница, которая направляла его (да и не только его) конкретные исследования во многих областях математических наук. С этой идеей, в частности, было связано огромное значение, придаваемое Лейбницем символической, которая кладется в основание каждого оперативного исчисления. «Следует заботиться, — писал он Чирнгаузу в 1678 г., — о том, чтобы знаки были удобны для открытий. Это достигается в наибольшей мере тогда, когда знаки коротко выражают и как бы отображают глубочайшую природу вещи, и при этом удивительным образом сокращается работа мышления»².

Примерами конкретной реализации идей всеобщей характеристики в творчестве самого Лейбница явились его работы по математической логике, введение индексов и определителей при решении систем линейных алгебраических уравнений и набросок геометрии положения (стр. 126). Во всех трех случаях мы имеем дело с зернами будущих больших теорий, которые были развиты в XVIII—XX вв.

Напомним, что, разрабатывая различные виды оперативных исчислений, Лейбниц интересовался и вопросами механизации этих исчислений. Здесь источник его внимания к счетным машинам, полностью автоматизирующим простые арифметические алгоритмы. В этом Лейбниц, вслед за Паскалем, был провозвестником блестящих достижений вычислительной техники наших дней. Его интересовали и чисто технические вопросы. Один из изобретателей паровой машины Дени Папен (1647—1712) сообщает, что основную идею этого изобретения — применение цилиндра и поршня — подсказал ему Лейбниц.

Самыми важными из созданных Лейбницем оперативных исчислений были дифференциальное и интегральное исчисления.

¹ G. W. Leibniz. *Mathematische Schriften*, herausg. von C. I. Gerhardt, Bd. I—VII. Halle, 1849—1863, Bd. V, S. 141. Мы видели, что термин «характер», как синонимом знака, символа, пользовались и другие ученые того времени, например Валлис (ср. стр. 41).

² G. W. Leibniz. *Mathematische Schriften*, Bd. IV, S. 455.

Первые инфинитезимальные исследования Лейбница

В только что цитированной переписке с Чирнгаузом 1678—1679 гг. Лейбниц довольно подробно и, так сказать, по свежим следам рассказал, как он пришел к дифференциальному и интегральному исчислению. Он указывает три главных источника своего открытия: 1) взятый у Паскаля и существенно обобщенный метод характеристического треугольника; 2) введенное Декартом и его последователями алгебраическое представление геометрических кривых и 3) открытия Валлиса и Меркатора в области бесконечных рядов вместе с собственными исследованиями о суммировании рядов при помощи порождающих их разностей. Синтез этих идей позволил ему открыть, что все инфинитезимальные задачи можно свести к аналитическим вычислениям двух типов. Задача о касательной и связанные с нею всегда приводят к вычислению разностей бесконечно близких членов рядов; задача о квадратуре и ей подобные, включая знаменитую обратную задачу о касательных, всегда ведут к вычислению сумм бесконечных рядов с бесконечно малыми соседними членами. В этих замечаниях отчетливо выражено, между прочим, отличие в подходе к анализу Лейбница и Ньютона. Творец флюксионного исчисления мыслил его основными задачами и понятия как бы геометрико-физически и выражал в терминах механики; создатель дифференциального и интегрального исчисления мыслил их геометрико-аналитически и выражал в терминах арифметики или алгебры.

Для иллюстрации более ранних исследований Лейбница, относящихся еще к 1673 г., мы рассмотрим один замечательный пример, в котором проблемы квадратур и разложения в ряды сплетены в единое целое, а применение характеристического треугольника играет ведущую роль. Речь идет о преобразовании, позволившем Лейбницу единообразно вывести большинство известных тогда квадратур и найти, как он выражался, арифметическую квадратуру круга. Если на данной кривой $y=f(x)$ взять две бесконечно близкие точки M, N (рис. 42, стр. 254) и в M провести касательную MT , пересекающую ось OY в точке T , причем

$$OT = y - x \frac{dy}{dx},$$

то бесконечно малый треугольник OMN равен половине бесконечно малого прямоугольника $LM'N'P$ с основанием $M'N' = MR = dx$ и высотой $LM' = OT$. Представим себе вспомогательную кривую с уравнением

$$z = f(x) - xf'(x) = y - x \frac{dy}{dx}.$$

Тогда площадь сектора OAB , ограниченного дугой данной кривой и радиус-векторами, проведенными из O в концы этой дуги $A(a, c)$, $B(b, d)$, равна половине площади криволинейной трапеции для вспомогательной кривой между соответствующими ординатами, т. е. $\frac{1}{2} \int_a^b (y - xy') dx$.

Все сказанное легко выводится из подобия характеристического треугольника MNR треугольнику $TM'M$ и треугольнику TOS , где OS перпендикулярна касательной MT . Это преобразование Лейбница, которое соот-

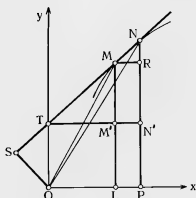


Рис. 42

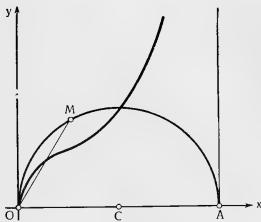


Рис. 43

ветствует нашему выражению дифференциала площади в полярных координатах

$$\frac{1}{2} \rho^2 d\varphi = \frac{1}{2} (y dx - x dy),$$

было известно ранее Дж. Грегори (1668) и Барроу (1670), но Лейбниц вывел его самостоятельно и применил весьма оригинально¹.

Допустим, что данная кривая есть полуокружность $y^2 = 2x - x^2$ радиуса 1 (рис. 43), так что

$$z = \frac{y}{2-x} = \frac{x}{y} = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$$

и вспомогательная кривая есть $x = 2z^2 / (1 + z^2)$, т. е. локон Аньези с осью симметрии на оси абсцисс и асимптотой $x = 2$ (квадратурой этой кривой занимался еще Ферма, ср. стр. 186). В таком случае площадь сегмента круга с основанием, соединяющим точки O и $M(x, y)$, равна

$$\frac{1}{2} \int_0^x z dx, \text{ а площадь соответствующего кругового сектора } \frac{1}{2} \left(y + \int_0^x z dx \right).$$

т. е.

$$\frac{1}{2} \left[z(2-x) + xz - \int_0^x x dz \right] = z - \int_0^x \frac{z^2 dz}{1+z^2}.$$

Разлагая дробь $z^2 / (1 + z^2)$ в ряд с помощью деления, по Меркатору, и интегрируя почленно, Лейбниц получил выражение для площади сектора в виде ряда

$$z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots$$

Если обозначить соответствующий сектору центральный угол 2φ , то площадь последнего будет φ , а так как $\operatorname{tg} \varphi = x/y = z$, то найденный ряд давал разложение арктангенса. Этот результат был найден ранее Ньюто-

¹ У Лейбница система декартовых координат была косоугольной. У Грегори и Барроу — только прямоугольной.

ном и Грегори (чего Лейбниц не знал), но Лейбниц первым в Европе (см. т. I, стр. 202) получил при $z=1$ выражение $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$, которое и назвал «арифметической квадратурой круга»¹. О своих результатах он вскоре сообщил Гюйгенсу и упомянул в письме к Ольденбургу от 15 июля 1674 г.; затем он подробно описал свой метод в письме от 27 августа 1676 г. для Ньютона, отправленном через посредство Ольденбурга. Тот же прием Лейбниц применил к квадратуре эллипса, гиперболы и циклоиды.

О ряде арктангенса Лейбниц специально заметил, что значение z в нем не должно превосходить 1. Вместе с тем он уже тогда располагал теоремой о сходимости знакопеременующегося ряда с монотонно убывающими и стремящимися к нулю членами, а также оценкой приближений, доставляемых частными суммами с четным и нечетным числом членов. Он только говорил не о сходимости ряда, а о том, что ряд имеет конечное значение. В письме к П. Бернулли от 10 января 1714 г. Лейбниц привел доказательство своего признака, но идея сходная с современным.

Все эти результаты Лейбниц распространялись не только путем переписки. В «Journal des Sçavans» за 1678 г. он опубликовал заметку, в которой сообщил квадратуру сегмента циклоиды, а в статье «Об истинном отношении круга к описанному квадрату, выраженном в рациональных числах» (*De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus. Acta Eruditorum. 1682*) опубликовалносящий его имя ряд для $\pi/4$. В этой же статье он упомянул о произведенных им в 1672 г. суммированиях рядов обратных фигурных чисел с помощью разностных схем, которые, как мы видели, он сам называл в числе источников своих главных открытий. Мы не останавливаемся на них, так как они представляют лишь третьестепенный интерес; упомянем лишь простейший случай обратных треугольных чисел:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1^2.$$

Переход к исчислению бесконечно малых

Осенью 1675 г. Лейбниц вступил впервые в область исчисления бесконечно малых в собственном смысле слова, введя его основные понятия, операции и символы. Сохранившиеся рукописные заметки позволяют точно датировать некоторые этапы его работы. 26 октября он еще выражает квадратуру по методу неделимых в духе Паскаля словами «все w » (*omnia w*), где w — ординаты, лишь подразумевая, как и Паскаль, что каждая линия умножается на бесконечно малое приращение абсциссы. Такой записью пользовался перед тем Валлис (1670). Через три дня, 29 октября, Лейбниц замечает, что вместо *omn. l* полезно писать $\int l$, т. е. сумма линий l ; знак $\int$ был взят как первая буква слова *summa*. Здесь, добавляя Лейбниц, возникает новый ряд исчисления. Если же дано $\int l = ya$ (множитель a

¹ В том смысле, что квадратура производится с помощью последовательности рациональных чисел (хотя и взятых в бесконечном числе).

² Этот результат получил ранее Бруннер, сложив почленно ряды, выражающие площади $EDCE$ и $ABCEA$ (стр. 160).

добавлялся, чтобы получилась размерность площади), то возникает другой род исчисления, в котором $l = ya/d$. При этом Лейбниц писал, что тогда как $\int$ увеличивает число измерений, d его уменьшает, $\int$ обозначает сумму, d — разность. Первой буквой слова «разность» — *differentia* и явился знак d . Быть может, потому, что вторая операция понижает размерность, знак d был поставлен первоначально в знаменателе¹. Но вскоре обнаружилось неудобство такой записи, так как разность абсциссы нередко приходилось писать в знаменателе. В рукописи «Примеры обратного метода касательных» (*Methodi tangentium inversae exempla*), датированной 11 ноября, менее чем две недели спустя, символы x/d , y/d заменяются на dx , dy , и записи принимают знакомый нам вид². Одновременно со всем этим формулировались на языке и в обозначениях нового алгоритма важнейшие правила операций, например: дифференцирования и интегрирования степенной функции, дифференцирования произведения, вынесения постоянного множителя за знак интеграла, интегрирования суммы. К этому времени Лейбниц оперировал и дифференциалами высших порядков, хотя еще не ввел для них специального обозначения.

Интеграл, который в то время и еще долго спустя Лейбниц называл суммой, выступал в новом исчислении как сумма бесконечного числа слагаемых, т. е. как определенный интеграл, но прежде всего как интеграл с переменным верхним пределом (и нижним пределом, равным нулю), что сразу выявляло взаимно обратный характер обеих фундаментальных операций. В одной из недатированных, но, очевидно, относящихся к тому же времени записей мы встречаем и такую

$$d \int x = x.$$

Впрочем, то обстоятельство, что, скажем,

$$\int_0^y y dy = \frac{y^2}{2},$$

как в том случае, когда y есть независимая переменная, так и в том, когда y есть какая-либо функция, Лейбниц специально обосновывал, ясно понимая различие между обоими случаями.

Заметим, чтобы к этому более не возвращаться, что Лейбниц долгое время употреблял термин «сумма». Слово «интеграл» ввел, по его собственным словам, И. Бернулли; в печати оно появилось в статье Я. Бернулли 1690 г., о которой будет сказано далее, а через несколько лет его одобрил в ходе переписки с И. Бернулли и Лейбниц.

Эти новые открытия Лейбниц частично изложил в письме к Ньютонову через Ольденбурга от 24 июня 1677 г. Он начинает со своего обобщенного им метода касательных, основанного на применении «разностей ординат», именно бесконечно малых разностей «соседних» (*proximarum*) координат. Приведя выражение разности степенной функции с натуральным показателем, Лейбниц для образца выводит разность $dy^2 = 2ydy$, опуская в выражении $y^2 + 2ydy + dy^2 - y^2 = 2ydy$ квадрат бесконечно малой величины «в силу оснований, известных из метода максимумов и мини-

¹ См. C. I. Gerhardt. Die Entdeckung der höheren Analysis. Halle, 1855, S. 125—126. Там же, стр. 134—135.

мумов»¹. Он сообщает также формулы дифференциала произведения, вычисляет отношение $\frac{dy}{dx}$ из уравнения $P(x, y) = 0$, где $P(x, y)$ — целый многочлен, и еще указывает, что его правило вычисления разностей не требует предварительного избавления от иррациональностей, как это нужно было в прежних методах². Далее говорится, что всегда можно квадрировать фигуру, представленную дифференциальным уравнением (aequatio differentialis), выражающим dx и произведенным (derivata) из другого уравнения, выражающего саму величину x ³. Иными словами, кривая $x = f(y)$ квадратуема, если известна функция $x = F(y)$, для которой $dx = dF(y) = f(y) dy$. Слова «дифференциальное уравнение» и «произведенное уравнение» — мы теперь говорим «производное» — появляются здесь впервые. Правда, в примере Лейбница имеется досадная описка, плод небрежности или спешки.

Мемуар Лейбница о «Новом методе»

Ньютон на это письмо Лейбница не ответил, не найдя в нем чего-либо для себя нового. Стремясь к распространению своих идей, Лейбниц, как мы упоминаем, делился ими в переписке с Чирнгаузом 1678—1679 гг. Именно к обозначениям дифференциалов и интегралов относились цитируемые на стр. 252 слова Лейбница о значении в математике подходящей символики.

Чирнгауз не сумел правильно оценить алгоритм Лейбница; более того, он полагал, что введение новых понятий и символов только затрудняет дело и что прежние методы дают более простое решение проблем. Это не помешало, впрочем, Чирнгаузу понять важность отдельных результатов Лейбница и некоторые из них он включил без указания источника и в неточной передаче в свои статьи, помещенные в 1682—1683 г. в Acta Eruditorum. Это заставило Лейбница поторопиться с дальнейшей публикацией его открытий, которую он уже начал статьей «Об истинном отношении круга к описанному квадрату». В мае 1684 г. он в том же журнале выступил с некоторыми осторожно сформулированными критическими замечаниями по адресу Чирнгауза, назвав только первую букву его фамилии, а в октябрьском выпуске поместил «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления» (Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus).

На помещенных далее фотографиях воспроизведена первая страница черновика этого мемуара и первая страница его печатного текста.

В этом составившем эпоху сочинении, насчитывавшем всего семь страниц, лишнем доказательств и к тому же искаженном опечатками и даже несколькими допущенными по небрежности ошибками, Лейбниц изложил основные начала дифференциального исчисления. Прежде всего дает-

¹ The correspondence of Isaac Newton, v. II. Cambridge, 1960, p. 213.

² В приводимых примерах Лейбниц фактически пользуется свойством инвариантности первого дифференциала (ср. стр. 259).

³ The correspondence of Isaac Newton, v. II, p. 245.

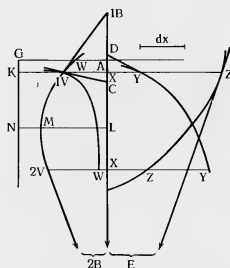


Рис. 44

ся определение дифференциала функции ¹, изображенной на рис. 44 кривой YY (или VV , или WW), имеющей ординаты $y = XY$ (или v , или w) и абсциссы $x = AX$. За дифференциал абсциссы, т. е. независимого переменного x , принимается произвольный отрезок dx , а дифференциал функции y вводится как отрезок, относящийся к dx , как ордината к соответствующей подкасательной, например y к DX ; иными словами,

$$dy = \frac{y dx}{t}.$$

Затем приводятся правила дифференцирования суммы, разности, произведения, частного ² и любой постоянной степени. Проблема дифференцирования иррациональных функций решается с предельной простотой в силу замечания, сделанного сразу после правила дифференцирования произведения: «Заметим, что в этом исчислении обращаются с x и dx так же, как с y и dy или с какой-нибудь другой неопределенной буквой и ее дифференциалом (*sum sua differentiali*)»³. В таких выражениях было сформулировано свойство инвариантности первого дифференциала или правило дифференцирования функции от функции.

Лейбниц подчеркивает алгоритмичность созданного им метода и вместе с тем широту его применения: «Если знать, так сказать, *Алгоритм* этого исчисления, которое я называю *дифференциальным*, то все прочие дифференциальные уравнения смогут быть получены при помощи общего вычислительного приема, и можно будет находить максимумы и минимумы, а также касательные, не испытывая при этом необходимости в устранении дробей или иррациональностей или других сложных выражений,

¹ Слово «функция» Лейбниц здесь не употребляет, а дифференциалы называет обычно разностями, хотя здесь же появляется и термин «дифференциал».

² Двойственность знаков в выражении дифференциала частного (см. фото, стр. 261) вызвана тем, что Лейбниц не различает знака подкасательных, расположенных в сторону возрастающих или убывающих абсцисс. Далее он указывает, что знак следует выбирать так, чтобы дифференциал возрастающей (убывающей) величины был положительным (отрицательным).

³ Г. В. Лейбниц. Избранные отрывки из математических сочинений, стр. 167.

как это приходилось, однако, делать, пользуясь доныне обнародованными методами»¹. Слово «алгоритм» здесь было употреблено, как говорилось (т. I, стр. 212), в новом, более общем смысле.

Исключая из определения дифференциала какое-либо указание на его инфинитезимальные свойства, Лейбниц, по-видимому, хотел оградить себя от критики, которую могло вызвать употребление бесконечно малых в исходном пункте его исчисления. В некотором смысле его дифференциал совпадал с флюксей Ньютона, поскольку dx можно взять равным единице. Математики ближайших поколений иногда смешивали эти понятия. Однако Лейбниц так же мало мог избежать бесконечно малых, как и Ньютон, а в отличие от Ньютона, и не стремился к этому. Непосредственно за приведенной цитатой следует указание, что доказательство всего сказанного будет легким для знакомых с этими вещами людей, если принять во внимание, что дифференциалы величин можно считать пропорциональными их мгновенным (*momentaneis*) приращениям или уменшениям, — это и позволяет для каждого данного уравнения написать его дифференциальное уравнение. Лейбниц особо подчеркивает то преимущество нового метода, что в нем основным объектом служит дифференциал, между тем как другие методы, обнародованные ранее, «по большей части употребляют отрезок вроде DX или какой-нибудь иной того же рода, а не отрезок dy , являющийся четвертым пропорциональным к DX . XY , dx , а благодаря этому все приходит в беспорядок»². Далее он заявляет, что его метод самым общим образом распространяется и на трансцендентные линии. «Для этого нужно только всегда держаться того, что пайти касательную — значит провести прямую, соединяющую две точки кривой, расстояние между которыми бесконечно мало (*infinite parva*), или же провести продолженную сторону бесконечноугольного многоугольника, который для нас равнозначен кривой. А такое бесконечно малое расстояние можно всегда выразить с помощью какого-либо известного дифференциала... или же с помощью отношения к нему, т. е. с помощью некоторой известной касательной»³.

Наряду с правилами алгоритма дифференцирования, Лейбниц формулирует в его терминах основные приемы исследования функций и кривых. Используя геометрическое значение отношения $dy : dx$, он кратко разъясняет признаки возрастания и убывания, максимума и минимума, выпуклости и вогнутости (следовательно, и достаточные условия экстремума для простейшего случая), а также точки перегиба. Попутно без каких-либо пояснений вводятся «разности разностей», обозначаемые ddv . Здесь все, замечает Лейбниц, зависит от правильного употребления знаков (и в этой связи он останавливается на вопросе о выборе знаков в формуле дифференциала частного). Упоминается случай, когда dy бесконечен относительно dx , причем касательная перпендикулярна к оси абсцисс.

В качестве примера даны решения задачи Ферма на определение пути, по которому в кратчайшее время распространяется свет из данной точки одной среды в данную точку другой среды, отделенной от первой прямой линией (еще в июльском выпуске «*Acta Eruditorum*» за 1682 г. Лейбниц

¹ Г. В. Лейбниц. Избранные отрывки из математических сочинений, стр. 169.

² Там же, стр. 169.

³ Там же, стр. 170.

мания на частные открытия и более всего желает усовершенствовать искусство открытий, что он стремится скорее давать методы, чем решения проблем, ибо один-единственный метод содержит в себе бесчисленное множество решений. Этого не понял должным образом Чирнгауз, но это вскоре стало ясным не только Лейбницу, но и ряду читателей его мемуара. Впрочем уже в ближайшие годы сам Лейбниц показал силу нового метода и на многочисленных «частных» открытиях, жизненно важных для прогресса исчисления бесконечно малых и его приложений.

Исчисление бесконечно малых, как алгоритм

В статье о «Новом методе» Лейбниц ограничился принципами дифференциального исчисления. Только в самом конце он, имея в виду интегральное исчисление, упомянул, что дал «лишь начала некоей много более высокой геометрии, которая распространяется на труднейшие и прекрас-

Первая страница печатного текста «Нового метода» Лейбница
(Acta Eruditorum, 1684)

II.

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MINIMIS. ITEMQUE TANGENTIBUS, QUAE NEC FRACTAS NEC IRRATIONALES QUANTITATES MORATUR, ET SINGULARE PRO ILLIS CALCULI GENUS*).

Sit (fig. III) axis AX. et curvae plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatae ad axem normales. VX, WX, YX, ZX, quae vocentur respective v, w, y, x. et ipsa AX, abscissa ab axe, vocetur z. Tangentes sint VB, WC, YD, ZE, axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio assumpta vocetur dx, et recta, quae sit ad dx, ut v (vel w, vel y, vel z) est ad XB (vel AC, vel XD, vel XE) vocetur dv (vel dw, vel dy, vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsarum w, vel y, vel z). His positis, calculi regulae erunt tales.

Sit a quantitas data constans, erit dz aequalis 0, et $\frac{dx}{dz}$ erit aequalis adx. Si sit y aequ. v (scu ordinata quaevis curvae YY aequalis cuius ordinatae respondentis curvae VV) erit dy aequ. dv. Jam Additio et Subtractio: si sit z — y + w + x aequ. v, erit dz — y + w + x scu dv aequ. dz — dy + dw + dx. Multiplicatio: d²xv aequ. xdv + vdx. seu posito y aequ. xv. fiet dy aequ. xdv + vdx. In arbitrio enim est vel formulam, ut xv, vel compendio pro ea literam. ut y, adhibere. Notandum. et x et dz eodem modo in hoc calculo tractari. ut y et dy, vel aliam literam indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam. non dari temper regressum a differentiali Aequatione. nisi cum quadam csutione, de quo alibi.

Porro Divisio: $d \frac{v}{y}$ vel (posito z aequ. $\frac{v}{y}$) dz aequ. $\frac{y dv - v dy}{yy}$.

Quoad Signa hoc probe notandum, cum in calculo pro litera substituitur simpliciter ejus differentialis, servari quidem eadem signa, et pro + z scribi + dz, pro — z scribi — dz. ut ex addi-

*) Act. Erud. Lips. an. 1684.

нейшие задачи прикладной Математики»¹, и еще указал, что кривая WW с постоянной подкасательной XC , которая ищется в одной из задач Дебона, логарифмическая.

Два года спустя, в статье «О глубокой геометрии и анализе неделимых и бесконечных» (*De geometria recondita et analysi indivisibilium, atque infinitorum*. Acta Eruditorum, 1686) Лейбниц впервые ввел в печати знак интеграла и указал на взаимно обратный характер операторов $\int$ и d .

Придя в одной задаче к $\int x dx$, он получает равенство

$$\int x dx = \frac{x^2}{2}$$

непосредственно из $dx^2/2 = x dx$, добавляя: «...у нас суммы и разности или $\int$ и d также взаимно обратны, как степени и корни в обыкновенном исчислении»². Для примера записывается еще в интегральной форме уравнение циклоиды

$$y = \sqrt{2x - x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$$

и объявляется, что из него можно вывести все ее свойства. В заключение подчеркивается, что при записи интегралов «не следует опрометчиво пренебрегать» знаком дифференциала аргумента, что допустимо лишь, когда аргумент есть независимая переменная, дифференциал которой можно считать постоянным на всем участке интеграции; если же сохранить за dx «надлежащую универсальность», то «из одного этого вытекают бесчисленные равносильные преобразования фигур»³.

Содержание статьи далеко не исчерпывается сказанным. Красной нитью в ней проходит мысль, что новые методы распространяются на бесчисленные трансцендентные величины, источником которых служат интегрирование и обратный метод касательных. В этом же мемуаре появился в печати термин «характеристический треугольник» применительно к треугольнику со сторонами dx , dy , ds , а также выражения «анализ бесконечных» (по образцу ньютонова «Анализа с помощью уравнений с бесконечным числом членов») и исчисление бесконечно малых.

Как говорилось, интеграл был для Лейбница прежде всего суммой, соответствующей нашему определенному интегралу с переменным верхним пределом, т. е. суммой, представляющей собой и одну из первообразных функций. Нижний предел во многих случаях соответствовал началу координат, и при этом первообразная оказывалась равной нулю. Однако четкого различения между определенным и неопределенным интегралом, как общим выражением всех первообразных, еще не было, как не было самих этих терминов и названий для пределов интегрирования.

Еще несколько лет спустя, в работе «Дополнение измерительной геометрии или наиболее общее осуществление всех квадратур при помощи движения, а также многообразное построение линии по данному свойству касательных» (*Supplementum geometriae dimensoriae, seu generalissima omnium Tetragonismorum effectio per motum, similiterque multiplex*

¹ Г. В. Лейбниц. Избранные отрывки из математических сочинений, стр. 173.

² Там же, стр. 176.

³ Там же, стр. 177.

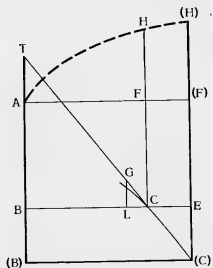


Рис. 45

constructio lineae ex data tangentium conditione, Acta Eruditorum, 1693) Лейбниц геометрически показал, что «общая задача квадратуры сводится к отысканию линии, обладающей определенным законом наклона»¹, т. е.

$$\int_0^x f(x) dx = F(x),$$

если

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x),$$

при этом неявно предполагается, что $F(0) = 0$ или же, что квадрiruемая и квадрiruющая кривые обе проходят через начало координат. Мы упоминаем об этой теореме, представляющей собой выраженную в терминах анализа теорему Барроу (см. стр. 212), с двойной целью. Во-первых, в ней явно устанавливалась взаимозависимость не только между интегралом и дифференциалом, но и между интегралом и производной, как наклоном касательной, т. е. тангенсом угла, образуемого ею с осью абсцисс. Во-вторых, в ней впервые появляется в печати правило, выражающее нашу формулу вычисления определенного интеграла через разность значений первообразной функции (ср. сказанное ранее о Ньюtone, стр. 235).

Интерес данной работы заключается, впрочем, не только в этих теоремах интегрального исчисления, но и в описании механизма, вычерчивающего для данной кривой квадрiruющую ее кривую. Мы коротко рассмотрим собственно математическую сторону дела. Пусть на рис. 45, как и у Лейбница, A есть начало координат, $AB = x$, $BC = y$, $FH = z$. Требуется квадрiruвать кривую $H(H)$, уравнение которой мы запишем $z = f(y)$. Вторая изображенная на рисунке кривая $C(C)$ с уравнением $x = F(y)$ такова, что отрезок $BT = t$, удовлетворяющий пропорции $t : y = z : a^2$, есть ее подкасательная для точки $C(x, y)$; для простоты

¹ Г. В. Лейбниц. Избранные отрывки из математических сочинений, стр. 176.

² Постоянный отрезок a введен Лейбницем для однородности.

мы положим $a = 1$. Лейбниц утверждает, что кривая $C(C)$ есть квадрирующая для данной кривой $H(H)$ и что площадь $FH(H)(F)$ равна разности координат $(F)(C)$ и FC . В самом деле, поскольку $t : y = z$ и вместе с тем $t : y = dx : dy$ (характеристический треугольник изображен на рисунке!),

$$dx = zdy$$

и значит

$$x = \int zdy = \text{пл. } AFHA.$$

В наших обозначениях

$$dF(y) = f(y) dy \text{ и } F(y) = \int_0^y f(t) dt.$$

Если положить еще $AF = c$ и $A(F) = d$, то данное Лейбницем выражение квадрируемой площади $FH(H)F$ запишется формулой

$$\int_c^d f(y) dy = F(d) - F(c),$$

где

$$dF(y) = f(y) dy.$$

Не входя в технические детали прибора, описывающего кривую $C(C)$ по данному закону наклона касательной, заметим, что к изобретению этого первого в истории математики интегрирующего механизма, пригодного для любой графически заданной функции, Лейбниц пришел, отправляясь от задачи, поставленной около 1675 г. парижским врачом и архитектором Клодом Перро (1613—1688)¹: определить кривую, описываемую на горизонтальной плоскости грузом, прикрепленным в конце нити, другой конец которой движется по данной прямой линии, т. е. кривую с постоянным отрезком касательной между точкой касания и данной прямой. Эту трансцендентную кривую исследовали также Гюйгенс (1693), называвший ее тракторией (лат. *tractoria* значит влекущая; теперь ее называют трактрисой) и еще ранее Ньютон.

В интегральном исчислении Лейбница, как и Ньютона, нашло место и общее понятие неопределенного интеграла. О нем Лейбниц говорит, хотя и мимоходом, но с полной ясностью, в статье «Подходящее построение задачи о парацентрической изохронной кривой» (*Constructio propria problematis de curva isochrona paracentrica*, *Acta Eruditorum*, 1694). Эта кривая обладает тем свойством, что разности высот падающего по ней тяжелого тела изменяются пропорционально времени. Здесь при переходе от дифференциального уравнения кривой к интегральному Лейбниц прибавляет на одной из сторон «произвольную постоянную величину» и замечает, что так надлежит поступать при интегрировании для общности решений, если это не исключается какими-либо условиями задачи. Тут же он добавляет, что при изменении постоянной интегрирования получается бесчисленное множество кривых, причем среди них,

¹ Братом автора знаменитых сказок — Шарля Перро.

насколько можно судить, всегда можно выбрать такую кривую, которая проходит через заданную точку, т. е. найти, как сказали бы мы, частное решение уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x)$, удовлетворяющее начальному условию $x = x_0, y = y_0$. В это время Лейбницу приходилось и в других задачах — на огигающие — рассматривать семейства кривых, зависящие от параметра (ср. стр. 275).

Интегральное исчисление является источником бесконечного множества трансцендентных функций. Всеобщее средство их представления и исследования Лейбниц, подобно Ньютону, видел в бесконечных степенных рядах. Что интегрирование функций и дифференциальных уравнений не подчинено единому алгоритму, было доказано в XIX в. Основатели исчисления бесконечно малых и их последователи надеялись обеспечить его алгоритмичность с помощью бесконечных рядов, которые тем самым по своему значению становились на один уровень с понятиями дифференциала и интеграла. Наилучшим в практическом отношении Лейбниц считал при этом метод неопределенных коэффициентов. В статье «Дополнение практической Геометрии, распространяющееся на трансцендентные проблемы с помощью нового наиболее общего Метода бесконечных рядов» (*Supplementum Geometriae practicae sese ad problemata transcendentia extendens, opre novae Methodi generalissimae per series infinitas, Acta Eruditorum, 1693*) он писал: «...бесконечные ряды можно получать удобнее и более общим образом (чем с помощью делений и извлечения корней. — *Ред.*), если принимать искомый ряд за уже найденный с тем, чтобы коэффициенты членов определять в дальнейшем. Таким образом, всегда можно прийти к ряду, когда свойство линии дано не только с помощью обыкновенного исчисления, но и в случае, когда оно дано сколь угодно сложным суммарным или дифференциальным или дифференцио-дифференциальным и т. д. уравнением. Искомое при этом в точности выражается рядом, если брать его целиком, и с любым приближением, если применять часть ряда»¹.

Для примера Лейбниц представил в форме рядов логарифмическую и показательную функции, отправляясь от дифференциального уравнения $dy = \frac{adx}{(a+x)}$ (и выражая в первом случае y рядом по x , а во втором x рядом по y), а также $x = a \sin \frac{y}{a}$, исходя из уравнения $a^2 dy^2 = a^2 dx^2 + x^2 dy^2$, полученного с помощью характеристического треугольника.

В последнем случае он сразу берет x в форме ряда с одними нечетными степенями $x = by + cy^3 + ey^5 + \dots$ и, чтобы избежать возведения в квадрат, дифференцирует уравнение $a^2 dy^2 = a^2 dx^2 + x^2 dy^2$ при постоянном dy , что дает $a^2 d^2 x + x dy^2 = 0$. Тем самым Лейбниц впервые аналитически вывел частное решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, столь важного в теории колебаний (ср. стр. 226)².

В результате дифференциальное и интегральное исчисление представлялось своему творцу поистине универсальным аппаратом исследования функций.

О развитии понятия функции подробно говорилось ранее (стр. 144).

¹ Г. В. Лейбниц. Избранные отрывки из математических сочинений, стр. 177—178.

² Найдя рекуррентные формулы, выражающие коэффициенты $c, e, \dots$ через a и b , Лейбниц полагает $b = 1$ с тем, чтобы синус прямого угла был равен радиусу.

Влияние первых же статей Лейбница на современников оказалось большим, чем работ Ньютона по методу флюксий. На стороне Лейбница было уже то преимущество, что свое исчисление бесконечно малых он предал широкой гласности через печать. Но здесь имели значение и другие обстоятельства. Ньютон не оценил в полной мере той роли, которую предстояло сыграть в развитии математического анализа символика. Его знаки флюксий и флюент, предложенные к тому же с большим опозданием, в 90-е годы, оказались малоудачными, хотя в механике до сих пор иногда обозначают производные двух первых порядков с помощью точек. Тщательно продуманная символика Лейбница не только отображала, как он желал, сущность выраженных в ней понятий и операций, но и была гораздо более простой и удобной; позднее оказалось, что она великолепно подходит для многократного дифференцирования и интегрирования функций любого числа переменных. Указывая, что Ньютон применяет другие знаки, Лейбниц в 1694 г. с полным правом писал, что его собственные «символы открывают большую перспективу»¹. Кроме того, Лейбниц более детально обработал всю оперативную сторону анализа как исчисления бесконечно малых различных порядков. То обстоятельство, что в изложении основ метода первых и последних отношений (в «Математических началах натуральной философии») применение бесконечно малых отступало на задний план, сыграло в ту эпоху на руку исчислению Лейбница. Еще в начале XIX в., когда Коши приступил к перестройке математического анализа на фундаменте новой теории пределов, он соединил ее с теорией бесконечно малых, подчеркивая, что имеет своей главной целью примирить научную строгость с «простотой, вытекающей из непосредственного рассмотрения бесконечно малых величин»². Наконец, не следует забывать о персональном факторе: постоянной заботе Лейбница о пропаганде его идей и его столь же постоянной готовности к духовному общению со всеми желающими.

Впрочем, дифференциальное и интегральное исчисление было встречено с энтузиазмом не везде, не всеми и не сразу. Мы упоминали о сдержанной позиции, занятой в конце 70-х годов Чирнгаузом. Гюйгенс, весьма расположенный к Лейбницу, более внимательно познакомился с его статьями в «Acta Eruditorum» лишь в 1690 г. по настоятельной просьбе автора, после чего пришел к выводу, что в новой символике нет необходимости, как свидетельствует его, Гюйгенса, собственный опыт. Разъяснения Лейбница, которые теперь кажутся убедительными, не произвели впечатления на стареющего ученого, привыкшего к собственным методам; Гюйгенс признавал, что особенно его затрудняет идея дифференциалов высших порядков. В Англии некоторые приемы и символика Лейбница нашли бы применение у одного из учеников Ньютона — Джона Крета (1660—1731) в малозначительных работах 1685—1708 гг., но вообще, вскоре после начала в 1699 г. спора о приоритете дифференциальному и интегральному исчислению дорога в Англию была закрыта надолго³.

¹ G. W. Leibniz. Mathematische Schriften, Bd. V, S. 306.

² A. Cauchy. Oeuvres complètes, Sér. 2, v. 4, Paris, 1899, p. 9.

³ Что не мешало целому ряду английских математиков начала XVIII в. называть флюксиями бесконечно малые разности переменных величин, употреблять как синонимы флюксии и моменты и рассматривать кривые линии, как составленные из бесконечно большого числа бесконечно малых отрезков прямых.

Сам Крег впоследствии полностью отказался даже от упоминания о Лейбнице и его трудах¹. В Парижской Академии наук господствовали картезианцы, раздраженные критической позицией Лейбница по отношению к всеобщей математике Декарта, и здесь идеи исчисления бесконечно малых хотя и укреплялись, но лишь в упорной борьбе. В Германии, если не считать Чирнгауза, вовсе не было крупных математиков, способных творчески усвоить идеи анализа бесконечно малых, и лишь в 40-х годах XVIII в. их начал излагать в своих руководствах Х. Вольф.

Вначале Лейбниц нашел только единичных последователей, зато первыми из них оказались такие энергичные и высоко одаренные ученые, как швейцарцы Яков и Иоганн Бернулли. Познакомившись со статьями Лейбница и найдя в них трудные места, Я. Бернулли, тогда уже профессор в Базеле, письменно обратился в конце 1687 г. к Лейбницу за консультацией. Лейбниц, который находился вне Ганновера в длительной служебной поездке, получил письмо и ответил только через три года. Тем временем Я. Бернулли сам овладел дифференциальным и интегральным исчислением и приобщил к нему также Иоганна. Вскоре оба они вместе с Лейбницем образовали триумвират, который менее чем за два десятилетия чрезвычайно обогатил и распространил новый анализ.

II. Бернулли и его первые ученики

О жизненном пути Я. Бернулли уже говорилось. Его брата Иоганна (1667—1748), младшего на двенадцать лет, в семье сначала прочили по коммерческой части. Но юношу неодолимо тянуло к науке. После трех лет занятий в Базельском университете в 1682—1685 гг., завершившихся приобретением степени магистра искусств, он принял по совету родных за изучение медицины, которая могла дать средства к существованию, а по личной склонности еще и за математику, — в этом им руководил брат Яков.

С осени 1691 г. И. Бернулли провел около года во Франции, где сблизился с парижским кругом ученых, который группировался около философа и физика Николая Мальбранша (1638—1715)² и наиболее видными членами которого были П. Вариньон и Г. Ф. Лопиталь. Картезианство в его философском и особенно физико-математическом аспектах было во Франции, как сказано, очень влиятельно. И. Бернулли сыграл решающую роль в приобщении названных ученых к анализу бесконечно малых и созданию французской ветви школы Лейбница. Лопиталь стал прямым учеником молодого швейцарца, который перед отъездом оставил ему рукопись целого курса дифференциального и интегрального исчисления, а затем с ноября 1692 г. вел с ним в течение десяти лет научную переписку. Этот курс И. Бернулли, бывший доступным и некоторым другим французским математикам, увидел свет не скоро, — почему, об этом будет сказано далее (стр. 284). Первыми были напечатаны в третьем томе сочине-

¹ Все же за Крегом остается та заслуга, что он первый обратил внимание на то, что вышедший мемуар Лейбница.

² В философии Мальбранш пытался соединить идеалистические стороны учения Декарта с религиозными воззрениями Августина. Он отвергал возможность взаимодействия телесной и духовной субстанций и наблюдаемую связь телесных и духовных явлений объяснял постоянным посредничеством божественной силы. Идеалистическим было и учение Мальбранша о познании.

ний И. Бернулли (*Opera omnia*, Lausannae — Genevae, 1742) «Математические лекции о методе интегралов и других вопросах, написанные для маркиза Лопиталья» (*Lectiones mathematicae de methodo integralium aliusque conscriptae in usum Marchionis Hospitalii*); замечательные для конца XVII в., в середине XVIII в. эти лекции имели уже скорее исторический интерес. Что касается «Лекций по исчислению дифференциалов» (*Lectiones de calculo differentialium*), то они были обнаружены среди рукописей Базельской университетской библиотеки уже в нашем столетии и изданы в 1922 г. Несмотря на такую судьбу, этот первый учебный курс дифференциального и интегрального исчисления, прочитанный одному-единственному слушателю, имел большое значение в дальнейшем прогрессе анализа.

С 1691 г. начали появляться в печати математические работы И. Бернулли частью в «*Acta Eruditorum*», частью в «*Journal des Sçavans*», к сотрудничеству в котором его привлек Вариньон и в котором участвовали Лопиталь, иногда Лейбниц и Я. Бернулли. Добавим, что оба брата Бернулли были выбраны в 1699 г. иностранными членами Парижской академии.

В 1692 г. И. Бернулли вернулся в Базель. Участие в решении нескольких важных задач и постановка новых делает его имя известным математикам; в 1693 г. начинается его интенсивная переписка с Лейбницем, сыгравшая большую роль в творчестве обоих корреспондентов. Все же, не имея возможности жить и содержать семью с помощью математики (он женился в 1694 г.), И. Бернулли продолжал занятия медицинскими науками и в том же 1694 г. защитил докторскую диссертацию на тему о движении мускулов (*Dissertatio de motu muscularum*, Basileae)¹. К счастью, благодаря содействию Гюйгенса, ему удалось в 1695 г. получить профессуру по физике в университете в Гронингене (Голландия). В 1705 г. он окончательно возвратился в Базель, где первоначально занял в университете место профессора греческого языка (!), но вскоре, после смерти брата, перешел на кафедру математики, которую и занимал до кончины.

Яков и Иоганн Бернулли внесли в анализ бесконечно малых вклад непреходящего значения. Быть может, старший брат, несколько более медлительный, отличался большей оригинальностью и глубиной идей, между тем как младший, все схватывавший на лету, был исключительно силен в разработке алгоритмических, оперативных приемов. В течение десяти лет, до смерти Якова, братья успешно соревновались между собой и с другими учеными в постановке и решении новых и новых задач дифференциального и интегрального исчисления, в его приложениях к геометрии и механике, а также в методах решения дифференциальных уравнений и вариационных проблем. К сожалению, это соревнование быстро перешло в резкие конфликты и публичные ссоры, отравлявшие обоим существование и по существу столь же неосновательные, как и более громкий спор о приоритете между Ньютоном и Лейбницем.

Помимо выдающихся научных достижений, обоим братьям, особенно младшему, который и дольше прожил и обладал большим педагогическим даром, принадлежит заслуга подготовки новых поколений ученых, про-

¹ Биомеханике, примыкавшей к декартовой трактовке телесной деятельности организмов как машин, положил начало труд о движении животных (1680—1684) Дж.-А. Борелли (ср. стр. 15). Бернулли впервые применил в этой области методы нового анализа.



Иоганн Бернулли

долживших начатое Лейбницем дело. Воспитанниками Я. Бернулли были, не считая Иоганна, их племянник Николай I Бернулли и Я. Герман, учениками И. Бернулли — Лопиталь, отчасти Вариньон, собственные сыновья Николай II и Даниил Бернулли, Г. Крамер и величайший математик XVIII в. Л. Эйлер.

Скажем несколько слов о Лопитале и Вариньоне.

Маркиз Гильом Франсуа Антуан де Лопиталь (1661—1704), начавший по желанию отца, генерал-лейтенанта французских войск, с военной карьеры, отказался от нее из-за близорукости, да и по призванию к математике, которое проявилось с детства. Знакомство с Мальбраншем, завязанное по инициативе Лопиталья, позволило ему установить широкие научные связи. Его первая проба сил — новое доказательство одного результата Гюйгенса в теории колебаний маятника — обратила на себя внимание Гюйгенса и Лейбница. С помощью И. Бернулли, как говорилось, Лопиталь в 1691—1692 гг. овладел исчислением бесконечно малых, и овладел мастерски. Он продемонстрировал свое дарование в решении, наряду с другими учеными, целого ряда частных задач математики и механики, — таких, например, как спрямление логарифмической кривой, задан-



Гильом Франсуа Лопиталь
(с гравюры Г. Эделинка, выполненной около 1695 г.
по портрету Фуше. Хранится в Национальной библиотеке в Париже)

ной условием $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{x}$ (1692)¹, или гораздо более трудная проблема о брахистохроне, т. е. кривой, по которой тяжелая точка спускается из одной точки в другую, не лежащую на той же вертикали, в кратчайшее время (1697). Нам еще придется говорить о некоторых открытиях Лопиталя в дифференциальной геометрии. Но главной заслугой его было создание — при участии И. Бернулли — первого печатного курса дифференциального исчисления — «Анализа бесконечно малых для исследования кривых линий» (*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, Paris, 1696), быстро получившего международное распространение. И к этой книге нам придется вернуться.

В 1693 г. Лопиталь был избран членом Парижской академии наук и дважды состоял ее вице-президентом. Уже после его смерти был издан другой его труд — по аналитической геометрии: «Аналитический трактат

¹ Лопиталь не знал, что вопрос этот решил еще Дж. Грегори в письмах к Коллинсу 1670—1671 гг.

о конических сечениях» (*Traité analytique des sections coniques*, Paris, 1707).

Друг Лопиталья Пьер Вариньон (1654—1722), с 1688 г. бывший членом Парижской академии и профессором математики в Коллеже четырех наций, а с 1704 г. в Коллеж де Франс, в большей мере был механиком, чем математиком, и в исчислении бесконечно малых видел прежде всего аппарат механики. Но и ему принадлежат большие заслуги в распространении анализа, особенно в успешной борьбе как внутри Парижской академии наук, так и вне нее с картезианцами, в частности с М. Роллем (см. стр. 282). В 1715 г. он поместил в «*Acta Eruditorum*» интересную статью по теории рядов, в которой выступил решительным сторонником применения только сходящихся рядов. К курсу дифференциального исчисления Лопиталья Вариньон написал обширный комментарий, опубликованный посмертно, «Пояснения к анализу бесконечно малых» (*Eclaircissements sur l'analyse des infiniment petits*, Paris, 1725).

Дальнейшая разработка анализа

В мае 1690 г. Я. Бернулли выступил в «*Acta Eruditorum*» со своей первой работой по исчислению бесконечно малых. В ней содержалось решение поставленной в 1687 г. Лейбницем задачи о форме кривой, по которой тяжелая точка опускается за равные промежутки времени на равные вертикальные отрезки. Что за линия (парацентрическая изохрона; стр. 264) есть полукубическая парабола, тотчас установили сам Лейбниц и Гюйгенс, но лишь Я. Бернулли опубликовал доказательство средствами нового анализа, выведя и проинтегрировав дифференциальное уравнение искомой кривой $\sqrt{b^2y - a^3} dy = \sqrt[3]{a^3} dx$. При этом и появился в печати термин «интеграл». Из приведенного уравнения, писал Бернулли, следует, что равны и интегралы (*integralia*) этих выражений

$$\frac{2b^2y - a^3}{3b^2} \sqrt{b^2y - a^3} = \sqrt[3]{a^3} x.$$

В конце статьи Я. Бернулли поставил вопрос о кривой, по которой располагается под действием тяжести однородная гибкая нить, подвешенная за два неподвижных конца. Вопрос ожидал решения более пятидесяти лет. Еще А. Жирар в своем издании сочинений Стевина (1634) заявил, что такая нить принимает форму параболы. Галилей дважды упомянул задачу в «Беседах и математических доказательствах» (1638), причем во втором случае отметил, что кривая не является параболой, хотя и близка к ней. Отличие цепной линии от параболы еще ранее установил И. Юнг (1627) и затем обосновал юный Гюйгенс, одновременно (1646) доказавший, что форму параболы имеет подвешенная за два конца нить, на которую действует нагрузка, равномерно распределенная вдоль горизонтали, — это утверждение высказал ранее И. Бекман. В ответ на статью Я. Бернулли в июньском выпуске «*Acta Eruditorum*» за 1691 г. появились решения задачи, найденные Лейбницем, Гюйгенсом и И. Бернулли. Лейбниц привел заодно построение касательной, спрямление, определение центра тяжести кривой, а также нашел объем и поверхность ее тела вращения. Статья И. Бернулли явилась его первым печатным трудом по математике; впрочем, подробное изложение своего решения он

дал только в лекциях по интегральному исчислению 1691—1692 гг., изданных в 1742 г. (см. стр. 267). Заметим, что ни один из названных авторов не написал привычное нам уравнение цепной линии, так как еще не имели обозначения для показательной функции. Но геометрическое построение ординат цепной линии по ординатам двух «логарифмических» кривых, симметричных относительно оси ординат, которое приводит, например, Лейбниц, в точности соответствует уравнению

$$y = a \frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}.$$

С этого времени начинается регулярное сотрудничество Лейбница с братьями Бернулли, особенно с младшим из них, и многие открытия совершаются теперь ими в ходе интенсивного обмена мнений и почти в одно время.

Существенным обогащением нового исчисления явилось вычисление дифференциала общей показательной функции. На этот пробел в системе приемов дифференцирования указал в 1694 г. один из первых критиков исчисления бесконечно малых голландский врач Бернгард Нивентейт (1654—1718). В своем «Ответе на некоторые затруднения, выдвинутые г. Бернгардом Нивентейтом против дифференциального или инфинитезимального метода» (*Responsio ad nonnullas difficultates a dn. Bernardo Nieuwentijt circa Methodum differentialem seu infinitesimalem motas*, *Acta Eruditorum*, 1695) Лейбниц восполнил этот пробел с помощью логарифмического дифференцирования величины u^x , которую назвал показательной. К тому же результату независимо пришел И. Бернулли (*Acta Eruditorum*, март 1697). Попутно И. Бернулли вывел изящное разложение в ряд, весьма заинтересовавшее Лейбница,

$$\int_0^1 x^x dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \dots$$

В то же время Лейбниц пришел к замечательной мысли — формально объединить операторы интегрирования и дифференцирования, рассматривая $\int$ как d^{-1} и вообще повторные интегралы, как дифференциалы с отрицательными индексами; следуя этому пути, он тут же сделал еще один смелый шаг вперед — ввел дифференциалы дробных порядков. Эти идеи были непосредственно связаны с открытием формулы многократного дифференцирования произведения двух или более функций, в которой Лейбниц усмотрел аналогию с формулой степени двучлена. Эта аналогия очевидна, если записать формулу бинома при натуральном n с помощью оператора $p^n u \equiv u^n$:

$$\begin{aligned} p^n(x+y) &= p^n x p^0 y + \frac{n}{1!} p^{n-1} x p^1 y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} p^{n-2} x \cdot p^2 y + \dots = \\ &= x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} y^2 + \dots, \end{aligned}$$

а соответствующий ему дифференциал в виде

$$d^n(xy) = d^n x d^0 y + \frac{n}{1} d^{n-1} x d^1 y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} d^{n-2} x d^2 y + \dots,$$

где $d^0 y = y$. Используя бесконечный биномиальный ряд, Лейбниц распространил замеченную аналогию на отрицательные n , понимая под d^{-n} повторный интеграл, обозначенный им $\int^n$, а также на дробные значения n . Для вычисления дифференциалов дробного порядка он в сущности применил формулу дифференцирования показательной функции, приняв, что $d^n e^{mx} = m^n e^{mx} (dx)^n$ для всех n . Эти открытия и их приложения Лейбниц изложил прежде всего в письмах к И. Бернулли 1695 г. Знакомы с ними в письме от 30 сентября 1695 г. Лопшталю, Лейбниц в заключение писал: «Из этих парадоксов, по-видимому, когда-либо извлекут весьма полезные следствия, ибо бесполезных парадоксов не существует»¹.

Впрочем, сам Лейбниц опубликовал только формулу дифференциала n -го порядка для произведения функций при натуральном n , и то через пятнадцать лет, в статье «Замечательный символизм алгебраического исчисления и исчисления бесконечно малых при сравнении степеней и разностей и о трансцендентном законе однородности» (*Symbolismus memorabilis Calculi Algebraici et Infinitesimalis in comparatione potentiarum et differentiarum...* *Miscellanea Berolinensia*, 1710). Соответствующие его письма к И. Бернулли были напечатаны в 1745 г. Впоследствии теорией дифференцирования с произвольным индексом занимались многие ученые, в том числе Л. Эйлер, Ж. Лиувилль, Б. Риман, А. В. Летников, Г. Вейль и другие; при этом были предложены обобщения, отличные от первоначального. Парадоксальная мысль Лейбница оказалась весьма плодотворной, и к ней, в частности, восходит символическое или операционное исчисление, получившее столь широкие применения в решении дифференциальных уравнений.

Трансцендентным законом однородности, фигурирующим в заглавии только что упомянутой статьи, Лейбниц называл то свойство дифференциальных многочленов, что их члены оказываются в конце концов однородными по отношению к порядкам входящих в них дифференциалов, т.е. в каждом члене сумма индексов этих порядков одна и та же. Название закона напоминало об алгебраическом принципе однородности, о котором мы говорили ранее, например, в связи с алгеброй Виета и Декарта.

Продолжая исследования Лейбница о применении бесконечных рядов к интегрированию (1693), И. Бернулли открыл новую, весьма общую форму разложения в ряд интеграла функции $n(z)$ по степеням аргумента, в которой коэффициенты выражены непосредственно через производные этой функции:

$$\int n dz = nz - \frac{z^2}{1 \cdot 2} \frac{dn}{dz} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^2 n}{dz^2} - \dots$$

(*Acta Eruditorum*, ноябрь 1694). Он вывел этот ряд, попарно группируя и затем почленно интегрируя очевидное в его глазах тождество

$$n dz = n dz + z dn - z dn - \frac{z^2 d^2 n}{1 \cdot 2 dz} + \frac{z^2 d^2 n}{1 \cdot 2 dz} + \dots$$

Свой ряд Бернулли сам характеризовал как наиболее универсальный. Еще ранее пришел к тому же результату Лейбниц, не опубликовавший, однако, своего открытия. Ряд Бернулли тесно связан с рядом Тейлора

¹ Г. В. Лейбниц. Избранные отрывки из математических сочинений, стр. 182.

и может быть получен из разложения

$$f(z+h) = f(z) + \frac{hf'(z)}{1} + \frac{h^2f''(z)}{1.2} + \frac{h^3f'''(z)}{1.2.3} + \dots,$$

если в нем заменить h на $-z$ и затем обозначить $f'_i(z) = n(z)$. При этом

$$f(z) - f(0) = \int_0^z n \, dz = zn(z) - \frac{z^2}{1.2} n'(z) + \frac{z^3}{1.2.3} n''(z) - \dots$$

Все же ни И. Бернулли, ни Лейбниц не записали ряд Тейлора в его обычной форме¹.

Многочисленны были приложения дифференциального исчисления к геометрии. В статье о «Новом методе» (1684) содержались только самые первые начала дифференциально-геометрического исследования кривых (касательные, экстремумы, выпуклость и вогнутость, точки перегиба). Два года спустя Лейбниц, исходя из рассмотрения роговидных углов между данной кривой и соприкасающимися с ней линиями, заложил основы учения о соприкосновениях высших порядков. Этому вопросу он посвятил статью «Новое размышление о природе угла касания и соприкосновения и об их применении в математической практике для замены более сложных фигур более простыми» (*Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi, horumque usu in practica mathesi ad figuras faciliores succedaneas difficilioribus substituendas*, *Acta Eruditorum*, 1686). Угол касания — это «наименьший» роговидный угол между данной кривой и касательной, угол соприкосновения — «наименьший» роговидный угол данной кривой с другой кривой, и прежде всего с окружностью. Лейбниц определил соприкасающийся круг (наш круг кривизны) как тот из кругов, касающихся линии со стороны ее вогнутости в данной точке, между которым и кривой в этой точке нельзя провести никакой иной дуги окружности. Практическую пользу новой теории Лейбниц видел в том, что она даст средство с высокой степенью точности заменять дугами более простых линий не слишком большие дуги более сложных кривых, действительное проведение которых затруднительно. Роговидные углы Лейбниц разделял на порядки в соответствии с порядком соприкосновения и рассматривал их как актуально бесконечно малые величины. При подходящем определении меры роговидного угла можно образовать систему актуально бесконечно малых углов различных порядков, не сравнимых в смысле Архимеда и Евклада (см. т. I, стр. 96). Но введенные Лейбницем понятия можно сформулировать и на языке современной теории соприкосновения в рамках классического архимедова анализа. Мы говорили ранее о дискуссиях ученых Средних веков и начала Нового времени относительно природы угла касания; Лейбниц писал, что теперь этот спор, казавшийся большинству пустым, приводит к прочным и многообещающим истинам.

Однако Лейбниц не дал аналитической теории соприкосновения кривых и ошибочно полагал, что соприкасающийся круг проходит через четыре бесконечно близкие точки кривой². Эту неточность — таких точек, вообще говоря, три — исправил Я. Бернулли (*Acta Eruditorum*, март 1692),

¹ В сочинении Б. Тейлора, в котором приведено разложение, носящее его имя (1715), ряд Бернулли — Лейбница имеется (см. т. III, гл. 7).

² Ньютон в «Метод флюксий» этой ошибки не допустил. Аналогичный промах Лейбниц сделал при определении касаний высших порядков.

выразивший затем радиус кривизны в виде $ds^3/dydx^2$, где y — абсцисса и x — ордината (*Acta Eruditorum*, июнь 1694). Обычное теперь выражение радиуса кривизны в декартовых координатах вывел двумя годами ранее И. Бернулли в своих лекциях по интегральному исчислению, но они, как было сказано, увидели свет полвека спустя. Одновременно братья Бернулли и Лопиталь изучали различные свойства эволют и эвольвент. В частности, в переписке между И. Бернулли и Лопиталем был подвергнут разбору вопрос о значениях, принимаемых радиусом кривизны в точках перегиба, причем Лопиталь обнаружил, что точке перегиба эволюты соответствует на эвольвенте точка возврата второго рода, т. е. острие, в котором обе ветви кривой обращены вогнутостью в одну сторону (письмо от мая 1694 г.). Упомянем, что в письме от 22 июля 1694 г. И. Бернулли в ответ на вопрос Лопиталья привел известное правило раскрытия значения неопределенностей вида $0/0$ (мы говорим теперь о предельном значении дроби, числитель и знаменатель которой стремятся к 0) посредством дифференцирования по отдельности числителя и знаменателя. Своему правилу Бернулли сообщил очень простое геометрическое доказательство. Оба только что названных результата были включены в учебник дифференциального исчисления Лопиталья (1696)¹.

В статье «О линии, образованной бесконечным числом проведенных по порядку и встречающихся между собою линий, и всех их касающейся» (*De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis inter se concurrentibus formata easque omnes tangente*, *Acta Eruditorum*, 1692) Лейбниц ввел общее понятие огибающей однопараметрического семейства кривых и сообщил, как находить уравнение огибающей с помощью дифференцирования уравнения семейства по параметру.

Наряду со всем этим изучались многочисленные более частные задачи геометрии и механики, некоторые из них уже упоминались. Несмотря на преимущественный интерес, который представляли для Лейбница общие методы, он постоянно имел в виду их конкретные приложения в естествознании и практической деятельности. В одной статье о цепной линии, помещенной в «*Journal des Sçavans*» за 1692 г., он писал, что применил свое исчисление «к ряду геометрически-физических задач; например к изохронной линии, опускаясь по которой тяжелое тело равномерно приближается к горизонту; к локсодроме или линии румбов ветра, для решения полезнейших геометрических задач мореплавания, которые до сих пор удавалось решать лишь несовершенным образом с помощью некоторых вспомогательных таблиц; к сопротивлению твердых или жидких тел для прогресса механики и, в частности, баллистики; к гармоническим законам планетных движений для усовершенствования астрономии; и к другим важным вопросам»². Решение таких частных задач имело, однако, отнюдь не только частный интерес; нередко с ним было связано создание больших разделов анализа, например, как мы сейчас увидим, теории эллиптических интегралов.

Среди работ братьев Бернулли упомянем прежде всего изящное исследование Я. Бернулли различных свойств логарифмической спирали³, эволюта и каустика которой, как он обнаружил, также являются логариф-

¹ Причем авторское право И. Бернулли на только что указанное правило указано не было, так что оно до сих пор нередко называется по имени Лопиталья (ср. стр. 284).

² Г. В. Лейбниц. Избранные отрывки из математических сочинений, стр. 166.

³ Я. Бернулли заинтересовался этой кривой, познакомясь с письмом Декарта Мерсенну от 12 сентября 1638 г., опубликованным в 1657 г. (ср. стр. 163).

мической спиралью (*Acta Eruditorum*, июнь 1691 и май 1692). Это свойство столь поразило Я. Бернулли, что он завещал изобразить на своем надгробии такую спираль с подписью: *eadem mutata resurgo*, т. е. «измененная, я возрождаюсь прежней»¹. Большое значение имело произведенное им спрямление параболической спирали $(a - \rho)^2 = b\varphi$, приведенное к эллиптическому интегралу. При этом Я. Бернулли установил равенство некоторых определенных дуг спирали, длину которой не мог выразить в известных ему функциях (*Acta Eruditorum*, январь 1691). Отправляясь от этого наблюдения, И. Бернулли пришел к постановке важного в теории эллиптических интегралов вопроса о разыскании кривых со спрямляемой суммой или разностью дуг (*Acta Eruditorum*, октябрь 1698). К эллиптическим интегралам Я. Бернулли вновь пришел при изучении упругой кривой, форму которой получает заделанная одним концом в стене упругая пластинка под действием силы, приложенной к другому концу; здесь и понадобилось ему выражение для радиуса кривизны, через который выражается изгибающий момент (*Acta Eruditorum*, июнь 1694). Возникающие в ходе исследования интегралы с постоянными пределами Я. Бернулли выразил с помощью числовых рядов:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2.5} + \frac{1.3}{2.4.9} + \frac{1.3.5}{2.4.6.15} + \dots,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2.7} + \frac{1.3}{2.4.11} + \frac{1.3.5}{2.4.6.15} + \dots$$

Впоследствии упругие кривые явились специальным предметом изысканий Д. Бернулли и Л. Эйлера. К тому же кругу проблем относится и исследование введенной Я. Бернулли кривой четвертого порядка — лемнискаты (*Acta Eruditorum*, сентябрь 1694).

Значительные успехи были достигнуты в технике интегрирования. Главный результат был получен Лейбницем и И. Бернулли, открывшими прием интегрирования рациональных дробей посредством их представления (после выделения целой части), как сумм простейших дробей. В своих двух статьях «Новый пример анализа для науки о бесконечном, относящийся к суммам и квадратурам» и «Продолжение анализа рациональных квадратур» (*Specimen novum analyseos pro Scientia infiniti circa summas et quadraturas; Continuatio analyseos quadraturarum rationalium*, *Acta Eruditorum*, 1702—1703) Лейбниц показал, как поступить в случае различных и кратных действительных кратных корней, но допустил ошибку в случае комплексных корней. Мы уже отмечали, что он по недосмотру упустил возможность разложения двучлена $x^4 + a^4$ на действительные квадратичные множители и далее на линейные множители вида $x \pm (a + bi)$ (стр. 38). Это в свою очередь привело его к ошибочному заключению, будто алгебраический многочлен с действительными коэффициентами неразложим, вообще говоря, в произведение линейных и квадратичных действительных множителей. Отсюда следовало, что интеграл рациональной дроби не выражается, помимо его рациональной части, в од-

¹ Однако мастер вытесал фактически, как видно на фотографии, линию, похожую на спираль Архимеда.

них только логарифмах и круговых функциях или, как выражался еще Лейбниц, не сводится к квадратуре гиперболы и круга.

И. Бернулли в работе «Решение одной задачи интегрального исчисления» (*Solution d'un problème concernant le calcul intégral*), напечатанной в «*Mémoires*» Парижской академии наук за 1702 г. (1704) и в извлечении в «*Acta Eruditorum*» за 1703 г., ограничился еще случаем действительных различных корней. В отличие от Лейбница, приведшего готовые формулы разложения, он показал, как вычислять их коэффициенты, предполагаемые сначала неопределенными. В этой же статье И. Бернулли вплотную подошел к изучению связи между круговыми и логарифмической функциями в комплексной области. Этот вопрос, как и последовавшую в 1712—1713 гг. полемику И. Бернулли с Лейбницем о природе логарифмов отрицательных чисел, мы осветим в следующем томе. Пока отметим лишь, что в письмах к Лейбницу 1702 г. И. Бернулли совершенно правильно указал на интегрируемость рациональных функций в рациональных,

Надгробие Я. Бернулли в Базельском соборе



круговых и логарифмических функциях и что в «Acta Eruditorum» за 1719 г. он со всей полнотой разобрал случай, когда знаменатель содержит квадратичные множители в какой-либо степени.

Интегрированию рациональных дробей Лейбниц придавал тем большее значение, что надеялся свести к нему интегрирование любых иррациональностей. В этой связи он подчеркивал важность дальнейшей разработки диофантовой алгебры, имея в виду методы приведения иррациональных выражений к рациональным¹.

Обыкновенные дифференциальные уравнения

В интегрировании функций школа Лейбница выдвигала на первый план сведение более сложных квадратур к более простым, подготавливая почву для постановки вопроса об интегрируемости в элементарных функциях. В интегрировании дифференциальных уравнений соответственно выдвигалась задача сведения их к квадратурам. Исследование этой задачи, очевидно, требовало классификации уравнений, которая не интересовала Ньютона, удовлетворявшегося решениями в форме бесконечного ряда (см. стр. 246). Проблему решения дифференциальных уравнений любого порядка в квадратурах Лейбниц четко сформулировал в начале первой из статей об интегрировании рациональных дробей, но работа в этом направлении велась с начала 90-х годов. С этой целью искали приемы, преобразующие данное уравнение в уравнение с разделенными переменными.

Одним из первых было решено однородное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

с помощью подстановки $y = xt$. Этот прием изложен в уже упоминавшихся «Математических лекциях о методе интегралов и о других вопросах», которые И. Бернулли составил в 1691—1692 гг.; такой же прием был известен Лейбницу. Уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

И. Бернулли в тех же «Лекциях» свел к однородному подстановками $x = \xi + \alpha$ и $y = \eta + \beta$; впрочем случай $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ он не упомянул. В «Лекциях» встречается и первое применение интегрирующего множителя, именно к уравнению $axdy - ydx = 0$. Умножая на y^{a-1}/x^2 , Бернулли получал $d(y^a/x) = 0$ и $y^a = bx$. Непосредственным разделением переменных Бернулли здесь не воспользовался, так как в то время в соответствии с общим правилом

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

принимал $\int \frac{dx}{x} = \infty$ (что соответствует интегрированию при нижнем пределе, равном нулю); впрочем в одном месте тех же «Лекций» он указал, что кривая $\int \frac{dx}{x}$ есть логарифмическая, и впоследствии выражал

¹ Ньютон в «Трактате о квадратуре кривых» также коснулся вопроса об интегрировании рациональных функций, но подробного изложения вопроса не дал.

на котором для уравнения $x^2 dx + y^2 dx = a^2 dy$ изображены изоклины $x^2 + y^2 = k^2$, несколько интегральных кривых и пересекающая их линия точек перегиба AN с уравнением $y^3 + x^2 y = a^2 x$ (рис. 49). Разобрав этот пример, И. Бернулли здесь писал: «Таков мой метод, найденный мною для общего построения дифференциальных уравнений; он может быть широко применен на практике, если довольствоваться механическим построением, ибо чем больше нанести близких друг к другу директрис, тем более подойдут к истинной искомой кривой»¹. Одним из достоинств такого геометрического построения Бернулли считал и то обстоятельство, что он позволяет обойтись не только без разделения переменных, чаще всего невозможного, но также в тех случаях, когда разделение возможно, без квадратур, из-за которых аналитическое решение нередко бывает практически неосуществимым. В последующем для приближенного решения дифференциальных уравнений долгое время применялись исключительно аналитические методы. Прикладное значение метод изоклин получил лишь в последней четверти XIX в., в первую очередь благодаря профессору Гентского университета Ж. Массо, которому, по-видимому, принадлежит и термин «изоклина», т. е. равнонаклонная.

До конца XVII в. были решены в квадратурах еще два класса дифференциальных уравнений. Лейбниц в письме к Лопиталю от 6 января 1695 г. привел линейное уравнение первого порядка $\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)$ к виду с разделенными переменными, представив искомое решение в виде произведения двух функций: $y = u \cdot v$. В 1695 г. Я. Бернулли поставил задачу о решении уравнения $\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)y^n$. Это «уравнение Бернулли», помимо него самого, решили Лейбниц, указавший, что оно сводится к линейному (*Acta Eruditorum*, март 1696), и И. Бернулли, предложивший — сначала в письме к Лейбницу от 4 сентября 1696 г. — замену $y^{1-n} = z$, преобразующую уравнение в линейное (*Acta Eruditorum*, март 1697). Упомянем еще, что в «*Acta Eruditorum*» за 1697 г. И. Бернулли поставил интересовавшую его с 1694 г. задачу о траекториях, т. е. кривых, пересекающих данное плоское однопараметрическое семейство линий под данным углом, указав на ее возможные применения в теории света Гюйгенса. В следующем году И. Бернулли в том же журнале показал, как эта задача сводится к дифференциальному уравнению первого порядка. Этот же результат был получен Лейбницем (в переписке с И. Бернулли)², а Я. Бернулли определил ортогональные траектории логарифмических кривых (*Acta Eruditorum*,

¹ Der Briefwechsel von Johann Bernoulli, Bd. I. Basel, 1955, S. 249.

В это же время Я. Бернулли свел уравнение $y' = x^2 + y^2$ подстановкой $y = -x/z$ к линейному $z'' + x^2 z = 0$, нашел z в форме степенного ряда, представил y (при условии $x = 0, y = 0$) отношением

$$\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{3 \cdot 4 \cdot 7} + \frac{x^{11}}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11} - \dots \right) : \left(1 - \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^8}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{x^{12}}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12} + \dots \right)$$

и затем, после деления, степенным рядом. Свои результаты он письменно сообщил Лейбницу в 1702—1703 гг. (опубл. 1744).

² Впрочем, только для ортогональных траекторий (путем замены в их дифференциальном уравнении $\frac{dy}{dx}$ на $-\frac{dx}{dy}$).

май 1698). Позднее задача о траекториях и ее обобщения неоднократно привлекали внимание математиков.

Если к сказанному добавить, что, судя по одному письму к Лейбницу, И. Бернулли в 1694 г. проинтегрировал уравнение $y = x\varphi\left(\frac{dy}{dx}\right) + \psi\left(\frac{dy}{dx}\right)$, называемое обычно по имени либо Даламбера, либо Лагранжа, то результаты в решении обыкновенных дифференциальных уравнений посредством квадратур, достигнутые менее чем за десять лет, представляются внушительными. В недрах исчисления бесконечно малых созрела новая дисциплина — теория дифференциальных уравнений.

Лейбниц и основания исчисления бесконечно малых

Подобно Ньютону, и Лейбниц уделил большое внимание проблеме обоснования дифференциального и интегрального исчисления. Уже в в главном своем мемуаре 1684 г. Лейбниц попытался заранее отвести возможную критику, определив дифференциалы аргумента и функции как некоторые конечные отрезки. Однако — об этом тоже говорилось — он здесь же применил бесконечно малые величины, а в дальнейшем неизменно трактовал дифференциалы как бесконечно малые приращения.

Но что такое бесконечно малые величины? В разное время Лейбниц отвечал на этот вопрос по-разному. Чтобы разрешить собственные сомнения и ответить на возражения извне, он предложил несколько концепций, различных по существу и по историческому значению. Так, в «Опыте о причинах движений небесных тел» (*Tentamen de motuum coelestium causis, Acta Eruditorum*, 1689) он выдвинул понятие о бесконечно малых как несравнимых величинах и им же воспользовался при разборе критических замечаний, выдвинутых упоминавшимся голландским ученым Б. Нивентейтом в двух работах 1694—1695 гг. Нивентейт считал неправомерными равенства вроде $a + dx = a$, ибо в случае равенства двух величин их разность должна быть нулем, а бесконечно малая считается отличной от нуля. Особенно возражал Нивентейт против бесконечно малых высших порядков, так как величины, которые при умножении на бесконечное число не дают в произведении обыкновенных величин, суть ничто. «Я, — отвечал в 1695 г. Лейбниц, — принимаю равными не только те величины, разность которых есть совершенное ничто, но и те, разность которых несравнимо мала»¹ (т. е. которые не удовлетворяют так называемой аксиоме Архимеда), — это упрощает и сокращает выводы, а «результат всегда можно подтвердить по способу Архимеда посредством приведения к нелепости»². Что касается другого возражения Нивентейта, то Лейбниц пояснял, что произведение бесконечно малых высших порядков на бесконечно большие соответствующих порядков может быть величиной, отличной от нуля.

Однако Лейбниц не пытался построить исчисление актуально бесконечно малых неархимедовых величин, и мы знаем теперь, что такое исчисление не может служить основой классического анализа³.

¹ Г. В. Лейбниц. Избранные отрывки из математических сочинений, стр. 189.

² Там же, стр. 189.

³ Следует, впрочем, сказать, что исчисление актуальных неархимедовых величин может быть положено в основу так называемого нестандартного анализа. См. A. Robinson. Non-standard analysis. Amsterdam, 1966; The metaphysics of the calculus. Problems Philos. Math., Amsterdam, 1967, p. 28—40.

Вместе с тем несравнимость инфинитезимальных величин Лейбниц иллюстрировал аналогией, в которой они выступали просто как весьма малые или большие друг относительно друга конечные величины. «Когда имеются различные порядки бесконечного или бесконечно малых,— писал он в одной заметке 1701 г.,— то понимаются они в том же смысле, в каком земной шар считается точкой по сравнению с расстоянием до неподвижных звезд, а шарик в наших руках — точкой по сравнению с полудиаметром земного шара,— так что расстояние от неподвижных звезд является бесконечно бесконечным или бесконечностью бесконечности по отношению к диаметру шарика»¹. Такие примеры вызывали недоумения даже в собственной школе Лейбница, например у П. Вариньона, который в то время вел борьбу с парижскими картезианцами, в частности алгебраистом М. Роллем, заявлявшим, что «характер точности не господствует больше в геометрии с тех пор, как к ней примешали новую систему бесконечно малых»². Главное возражение Ролля, как и Нивентейта, заключалось в том, что из равенства $a + dx = a$ следует $dx = 0$, ибо нуль и определяется равенством $a + 0 = 0$.

Заметим, немного отступая в сторону, что полемика между сторонниками нового анализа и последователями картезианской математики, которая велась и в заседаниях Парижской академии и в печати и в которой участвовало много лиц, принимала времена очень острый характер. Академия даже запретила было своим сочленам, т. е. тем же Роллю и Вариньону, публично выступать по этому вопросу. Главные участники спора посвятили ему одиннадцать статей: пять мемуаров — Ролль и шесть — Вариньон. Дело закончилось тем, что осенью 1706 г. Ролль отказался от своих возражений. Но позиции картезианцев в Академии еще долго оставались крепкими, особенно в области физики.

Получив письмо Вариньона от 29 ноября 1701 г., Лейбниц 2 февраля 1702 г. ответил ему, что воспользовался приведенными несколько выше образами обычного шарика, земного шара и т. п., дабы избежать различных метафизических споров и сделать свои рассуждения понятными всем. Теперь Лейбниц предлагает рассматривать бесконечно малые как переменные, исчезающие величины (быть может, здесь сказалось влияние Ньютона),— это позволяет объяснить точность результатов, полученных с их помощью. «В самом деле, если какой-либо противник желает возражать против наших утверждений, то из нашего исчисления следует, что ошибка будет меньше, чем любая ошибка, какую он сможет указать, ибо в нашей власти взять несравнимо малое достаточно малым для этой цели, поскольку такую величину можно взять сколь угодно малой»³. Эти важные утверждения Лейбниц оставил без доказательства. По существу в них содержалась целая программа построения анализа на основе понятия потенциально бесконечно малой величины. Оригинальную попытку такого рода предпринял в 1796 г. Л. Карно, но впервые это удалось в 20-е годы XIX в. О. Коши.

В том же письме Лейбниц касается вопроса о реальности инфинитезимальных величин. Чтобы не ставить анализ в зависимость от того или иного решения этого вопроса, он замечает, что те, кто отвергает их в ка-

¹ Г. В. Лейбниц. Избранные отрывки из математических сочинений, стр. 190.

² См. статью С. А. Яновской. Мишель Ролль как критик анализа бесконечно малых. Труды Ин-та истории естествознания, т. 1. М., 1947, стр. 336.

³ Г. В. Лейбниц. Избранные отрывки из математических сочинений, стр. 191—192.

честве действительных объектов, могут «надежно пользоваться ими как идеальными понятиями, сокращающими рассуждения и сходными с так называемыми в обыкновенном анализе мнимыми корнями»¹ или с измерениями выше третьего порядка. Но, помимо того, что всегда остается потенциальная бесконечность, несравнимые, как и мнимые, величины имеют свое действительное основание (*fundamentum in re*), и «в геометрии и даже в природе все происходит, как если бы они представляли собой совершенные реальности»². В другом письме к Вариньону от 20 июня 1702 г. Лейбниц называл обе категории величин хорошо обоснованными фикциями. Здесь методологические проблемы исчисления бесконечно малых смыкались с общими философскими воззрениями Лейбница на соотношение между реальным и идеальным и т. д.

Наряду со всем этим Лейбниц (в рукописной заметке 1702 г.) предлагал еще трактовку бесконечно малых как особого рода нулей, связывая ее со своим принципом непрерывности, о котором говорилось в геометрической главе этого тома (стр. 126). Как поясняет Лейбниц, этот принцип заключается в том, что покой, равенство, круг и т. п. заканчивают (*terminent*) движения, неравенства и правильные многоугольники, которые переходят в них при непрерывном изменении. И хотя эти концы (*terminaisons*) не принадлежат к ограничиваемым ими многообразиям (*variétés*), они имеют свойства последних. Мы уже цитировали такую формулировку Лейбница: *«Если явления (или данные) непрерывно сближаются так, что напоследок одно переходит в другое, то это же должно произойти и с соответствующими последующими или результатами (или искомыми)»*³. Не следует видеть в этих словах определения непрерывной функции; от такого толкования принципа Лейбниц был весьма далек. Вместе с тем принцип непрерывности напел у него многочисленные приложения. В интересующем нас случае речь идет о переносе свойств непрерывно меняющихся объектов на свойства предельных объектов, когда один из них оказывается исчезающим. В упомянутой заметке Лейбниц показывает, что даже в алгебре приходится иметь дело с бесконечно малыми, если угодно сохранить за ней преимущество общности. Беря два подобных треугольника и представляя себе, что оба они изменяются с сохранением подобия так, что стороны одного стягиваются в точки, Лейбниц рассматривает пропорцию, составленную отношениями каких-либо пар соответственных сторон. Чтобы подвести предельный случай под общее правило, он трактует исчезающие стороны как нули или ничто, но не в абсолютном, а в «сравнительном смысле»⁴, как нули по сравнению с конечными сторонами другого треугольника, нули, которые сохраняют между собой определенное отношение конечных величин. Мы увидим, что Эйлер попытался построить математический анализ на основе специального «исчисления нулей».

При всем богатстве высказываний Лейбница о природе и свойствах инфинитезимальных величин ему не удалось выйти за пределы «мистического», как выразился К. Маркс⁵, дифференциального исчисления и най-

¹ Г. В. Лейбниц. Избранные отрывки из математических сочинений, стр. 192.

² Там же, стр. 192.

³ Там же, стр. 194.

⁴ Там же, стр. 195. Характерно название этой заметки, посланной Лейбницем Вариньону: «Оправдание исчисления бесконечно малых с помощью исчисления обыкновенной алгебры» (*Justification du Calcul infinitésimal par celui de l'Algèbre ordinaire*).

⁵ К. Маркс. Математические рукописи. М., 1968, стр. 165.

ти решение вопроса, удовлетворяющее его самого. По-видимому, со временем Лейбниц все более отходил от концепции бесконечно малых, как актуально «несравнимых» величин, и склонялся к их пониманию, как переменных величин. Но в школе Лейбница бесконечно малые применялись без всякого определения, просто как величины, подчиняющиеся принципу отбрасывания высших бесконечно малых по сравнению с низшими или же «трансцендентному закону однородности».

Рукописные «Лекции по исчислению дифференциалов», составленные И. Бернулли в 1691—1692 гг., начинались тремя такими постулатами:

«1. Величина, уменьшенная или увеличенная на бесконечно меньшую величину, не уменьшается, не увеличивается.

2. Всякая кривая линия состоит из бесконечно многих прямых, которые сами бесконечно малы.

3. Фигура, заключенная между двумя ординатами, разностью абсцисс и бесконечно малым куском любой кривой, рассматривается как параллелограмм»¹.

Последний постулат, относившийся к примыкавшему к этим «Лекциям» курсу интегрального исчисления Бернулли, в сущности есть следствие первого. Первые два постулата были в несколько иной формулировке включены в «Анализ бесконечно малых для исследования кривых линий» (1696) Лопиталья.

Перед постулатами Лопиталь поместил еще два определения — переменной величины и дифференциала. Последнее гласит: «Бесконечно малая часть, на которую непрерывно увеличивается или уменьшается переменная величина, называется ее дифференциалом»².

Первые руководства по математическому анализу

Краткие мемуары Лейбница, весьма трудные для понимания, не могли служить пособием для изучения исчисления бесконечно малых. Лейбниц долгие годы намеревался написать систематическое руководство, но этого не сделал. Первым курсом анализа явились уже не раз упомянутые лекции И. Бернулли, которые он читал в 1691—1692 гг. Лопиталю; их постигла, как говорилось, необычная судьба. Лопиталь по соглашению с Бернулли широко использовал их для своего «Анализа», в том числе и лекции по интегральному исчислению, включавшие многие вопросы, относящиеся к приложениям дифференциального исчисления (соприкосновение кривых, эволюты, каустики и т. д.). Сам же курс анализа Бернулли своевременно напечатан не был.

Совершенно иной оказалась участь «Анализа бесконечно малых» Лопиталья. Изложенные в нем методы принадлежат почти целиком Лейбницу и братьям Бернулли, особенно Иоганну, который помог автору еще и тем, что решил по его просьбе многие трудные задачи. Заявив, что он «без всякого стеснения пользовался их открытиями», Лопиталь признал в весьма общей форме авторские права за ними всеми «на все, что им угодно», не указав, однако, в частности, чем он обязан своему непосредствен-

¹ J. Bernoulli. Die Differentialrechnung, übersetzt von P. Schafheitlin. Leipzig, 1924, S. 11.

² Г. Ф. де Л'Опиталь. Анализ бесконечно малых. Перевод Н. В. Леви. Редакция и вступительная статья А. П. Юшкевича. М.—Л., 1935, стр. 62.

ному руководителю¹. Однако выдающиеся педагогические достоинства книги — ее ясность и увлекательность, богатый подбор детально разобранных задач, прекрасный слог — принадлежат Лопиталю, который внес кое-что свое и в разработку теоретических проблем (мы упоминали, например, об открытии им точек возврата второго рода). Книга выдержала еще четыре французских издания, последнее из которых вышло в 1781 г.; в 1730 г. была переведена на английский (с заменой дифференциалов на флюксии) и в 1764 г. вышла в Вене на латинском языке. Кроме того, к «Анализу» было написано несколько подробных комментариев, один из которых принадлежал перу П. Вариньона (см. стр. 271). Успех книги был, таким образом, велик и вполне заслужен. «Анализ бесконечно малых» Лопиталья впервые открыл доступ к этой науке более широкому кругу людей.

Чтобы дать несколько более полное представление об этом руководстве, добавим, что самый алгоритм дифференцирования в нем изложен в том же объеме, что и в «Новом методе» Лейбница (как и в лекциях И. Бернулли), и составляет примерно 5% текста, а основное содержание образуют геометрические приложения, что и получило отражение в полном названии книги. Все понятия тут же иллюстрируются чертежами. Добавим, что и в лекциях И. Бернулли по интегральному исчислению техника интегрирования сводилась еще к очень немногим правилам.

«Анализ бесконечно малых» Лопиталья не удовлетворил, однако, потребности в руководстве, излагающем начала интегрального исчисления. Первую, мало успешную попытку восполнить этот пробел сделал ученик Вариньона Л. Карпе (1663—1711) в «Метод измерения поверхностей, размеров тел, их центров тяжести, удара и качания посредством интегрального исчисления» (*Méthode pour la mesure des surfaces, la dimension des solides, leurs centres de pesanteur, de percussion et d'oscillation par l'application du Calcul intégral*, Paris, 1700). Вслед за тем обе ветви анализа включил в свой обширный курс математики профессор в Анжере Шарль-Рене Рейно (1656—1728). Полное название этого двухтомного сочинения очень длинное, мы приведем начало и конец: «Доказанный анализ или метод решения задач математики... и физико-математических наук с помощью обыкновенного исчисления алгебры, дифференциального исчисления и интегрального исчисления. Эти последние исчисления здесь также объяснены и доказаны» (*Analyse démontrée ou la méthode de résoudre les problèmes des mathématiques ... et des sciences physico-mathématiques, en employant le calcul ordinaire de l'algèbre, le calcul différentiel et le calcul intégral. Ces derniers calculs y sont aussi expliqués et démontrés*, Paris, 1708). Слово «доказанный» употреблено с умыслом: Роль обвинял сторонников

¹ Г. Ф. де Л'Опиталь. Анализ бесконечно малых, стр. 59. То обстоятельство, что И. Бернулли оказал Лопиталю столь значительную помощь в подготовке этой книги, объясняется главным образом материальной заинтересованностью швейцарского математика, в январе 1694 г. обручившегося со своей будущей женой. В письме от 17 марта 1694 г. Лопиталь предложил И. Бернулли ежегодную пенсию в 300 лиров с обещанием затем ее повысить при условии, что он возьмет на себя разработку интересующих его вопросов и будет сообщать ему и только ему свои новые открытия, а также никому не пошлет копии своих сочинений, оставленных в свое время у Лопиталья. Этот удивительный контракт соблюдался до издания «Анализа бесконечно малых». Позднее И. Бернулли — сначала в письмах к друзьям, а после смерти Лопиталья и в печати — стал предъявлять свои права со все большей конкретностью и определенностью. См. статью О. Шписа в книге «Der Briefwechsel von Johann Bernoulli», стр. 123 и след.

нового анализа в том, что он — не доказанный. Рейно, как и Лопиталь и Карре, имел доступ к лекциям Бернулли.

И в Англии в эти же годы вышло первое удовлетворительное изложение метода флюксий Гемфри Диттона (1675—1715): «Учение о флюксиях, содержащее первые начала, действия и некоторые применения и приложения этого замечательного метода» (*Institutions of Fluxions: containing the First Principles, the Operations, with some of the Uses and Application of that admirable Method*, London, 1706).

Итоги столетия

Обозревая путь, пройденный математикой в течение XVII в., мы видим, что революция, наметившаяся в этой науке в 30-е годы, к концу столетия торжествовала полную победу. Главным предметом исследования стало понятие функции как аналитического выражения, отвечавшее потребностям математического естествознания Нового времени, а главным средством исследования — алгоритмы исчисления бесконечно малых. Создание на первом этапе математической революции аналитической геометрии имело в сущности принципиальное значение лишь в той мере, в какой содействовало становлению математического анализа.

Как говорилось в начале (стр.16), революционные сдвиги происходили и в других областях математики. Таковы были появление проективной геометрии и теории вероятностей, которым еще предстояло великое будущее. Большими успехами отмечено было развитие численных методов и алгебры; был решен и поставлен ряд важных задач теории чисел. Мы подчеркивали, что приближенные приемы, создававшиеся для астрономических и иных расчетов, имели интерес, выходящий далеко за пределы их приложений. Во многих случаях они требовали глубоких теоретических изысканий и сами оказывались отправным пунктом новых теорий. И чем дальше, тем больше судьбы численных методов связывались с общими судьбами математического анализа. В алгебре впервые была высказана ее основная теорема, заложены начала теории симметрических функций, сделаны первые шаги в изучении распределения корней, проблемы приводимости и т. д. Комплексные числа, несмотря на отсутствие их реальной интерпретации, прочно вошли в обиход алгебры и анализа. Влияние этих и других, не названных здесь открытий на теоретическую мысль со временем возрастало.

При всем том, однако, особенно интенсивно и в количественном и в качественном отношении развивался анализ бесконечно малых. Небольшая группа ученых, группирувавшихся вокруг Ньютона и отдельно вокруг Лейбница, за немногие годы не только далеко продвинула дифференциальное и интегральное исчисление, как таковое, и метод бесконечных рядов, но и приступила к созданию новых отделов анализа и его приложений. Мы сравнительно подробно описали первые успехи в интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений и в дифференциальной геометрии плоских кривых. На рубеже XVII и XVIII вв. математики вступили еще в две области математического анализа. Об одной из них, именно о начале исследований в теории функций комплексного переменного, мы упоминали в связи с работами Лейбница и И. Бернулли по интегрированию рациональных дробей (стр. 277). Другую область — вариационное исчисление — мы пока почти совсем не затрагивали. Здесь нам

придется ограничиться замечанием, что для развития вариационного исчисления наибольшее значение имели задачи о брахистохроне и о геодезических линиях, поставленные И. Бернулли в 1696 — 1697 гг., и изопериметрическая задача, выдвинутая Я. Бернули в 1697 г., т. е. в самом конце рассматриваемого времени. Нам будет удобнее рассмотреть первые стадии развития теории аналитических функций и вариационного исчисления в соответствующих отделах следующей главы.

Приобретения математического анализа были настолько велики, что подавали надежду на близкое решение всех основных его задач. Лейбниц, для которого, как и для Ньютона, анализ не был при всей его важности и ценности самоцелью, а в первую очередь средством миропознания, писал Гюйгенсу в сентябре 1691 г.: «Я хочу, чтобы мы могли еще в этом веке довести до завершения анализ чисел и линий, по крайней мере, в главном, дабы избавить от этой заботы человеческий род, чтобы отныне вся проницательность человеческого разума обратилась к физике»¹. Вскоре стало ясным, что это желание великого мыслителя далеко опережало реальные возможности математики. Более того, чем обширнее и значительнее становились приложения анализа в физике, тем более сложные и глубокие задачи возникали перед самим анализом.

Это доказало уже развитие математики в XVIII в., которое во всех своих главных особенностях было непосредственным продолжением научной революции XVII столетия.

¹ G. W. Leibniz. Mathematische Schriften, Bd. II, S. 107—108.

БИБЛИОГРАФИЯ

Сокращенные названия многотомных и периодических изданий

- | | |
|---------------------|---|
| ИМИ | — Историко-математические исследования. Под редакцией Г. Ф. Рыбкина и А. П. Юшкевича. М., с 1948 г. |
| ВИЕТ | — Вопросы истории естествознания и техники. М., с 1956 г. |
| Труды ИИЕ | — Труды Института истории естествознания АН СССР. М., 1947—1952. |
| Труды ИИЕТ | — Труды Института истории естествознания и техники АН СССР, М., 1954—1961. |
| AGMW | — Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, herausg. von M. Cantor, Bd. 1—30. Leipzig, 1877—1906. |
| AHES | — Archive for History of Exact Sciences, ed. C. Truesdell. Berlin — Heidelberg — New York, since 1961. |
| BM (I),
(2), (3) | — Bibliotheca mathematica, herausg. von G. Eneström, I. Folge 1884—1886, 2. Folge 1887—1899, 3. Folge 1900—1916. |
| QS (A),
(B) | — Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, herausg. von O. Neugebauer und O. Toeplitz, Abt. A (Quellen). Bd. 1—4. Berlin, 1930—1937; Abt. B (Studien), Bd. 1—4. Berlin, 1931—1937. |

Литература ко II тому¹

1. Общие сочинения

- Цейтлен Г. Г.* История математики в XVI и XVII веках. Перевод П. С. Новикова. Редакция и примечания М. Я. Выгодского. 2-е изд. М.—Л., 1938.
- Cantor M.* Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik, Bd. 2—3. 3 Aufe. Leipzig, 1913.
- Hofmann J. E.* Geschichte der Mathematik, Bd. 2. Berlin, 1957.
- Whiteside D.* The patterns of mathematical thought in the later seventeenth century.—AHES, 1961, v. I, N 3,

2. Издания классиков

- Бернулли Я.* Четвертая часть «Ars conjectandi». Перевод Я. В. Успенского. СПб., 1913.
- Галилей Г.* Избранные труды (гл. ред. Ю. А. Ишлинский), т. 1—2, М., 1964.
- Гюйгенс Х.* Трактат о свете. Перевод Н. Фредерикс. Редакция и примечания В. Фредерикса. М.—Л., 1955.
- Гюйгенс Х.* Три мемуара по механике. Перевод, редакция и примечания К. К. Баумгарта. М.—Л., 1954.
- Декарт Р.* Геометрия с приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта. Перевод, примечания и статья А. П. Юшкевича. М.—Л., 1938.
- Декарт Р.* Рассуждение о методе с приложениями: Диоптрика, Метеоры, Геометрия. Перевод, статьи, комментарии Г. Г. Слюсарева и А. П. Юшкевича. М., 1953.

¹ См. также литературу ко всем трем томам, приведенную в т. I, стр. 327.

- Кавальери Б.* Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного, с приложением «Опыта IV» о применении неделимых к алгебраическим степеням. Перевод, вступительная статья и комментарии С. Я. Лурье. М.—Л., 1940.
- Кеплер И.* Новая стереометрия винных бочек. Перевод и предисловие Г. Н. Свешникова. Вступительная статья М. Я. Выгодского. М.—Л., 1935.
- Лейбниц Г. В.* Избранные отрывки из математических сочинений. Составил и перевел А. П. Юшкевич.— Успехи матем. наук, 1948, т. III, вып. I (23), 165—204.
- Лопиталь Г.* Анализ бесконечно малых. Перевод Н. В. Леви. Редакция и вступительная статья А. П. Юшкевича. М.—Л., 1935.
- Ньютон И.* Математические работы. Перевод, вводная статья и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского. М.—Л., 1934.
- Ньютон И.* Математические начала натуральной философии. Перевод и комментарии А. Н. Крылова. Собрание сочинений акад. А. Н. Крылова, т. VII. М.—Л., 1936.
- Ньютон И.* Всеобщая арифметика. Перевод, статья и комментарии А. П. Юшкевича. М., 1948.
- Паскаль Б.* Опыт о конических сечениях. Перевод и примечания Г. И. Игнациуса.— ИМИ, 1961, т. XIV, 603—624.
- Ферма П.* Введение в изучение плоских и пространственных мест. О максимуме и минимуме. Выдержки из переписки с Декартом.— В кн.: *Р. Декарт.* Геометрия. М.—Л., 1938, стр. 137—196.
- Ферма П.* Синтез для рефракции. Перевод Ю. Х. Копелевич.— В сб.: Вариационные принципы механики. М., 1959, стр. 6—10, 742—745.
- Barrow I.* Collected works. Cambridge, 1860.
- Barrow I.* Geometrical lectures, ed J. M. Child. Chicago, 1916.
- Bernoulli Jac.* Opera, v. 1—2. Genevae, 1744.
- Bernoulli Joh.* Opera omnia, v. 1—4. Lausannae — Genevae, 1742.
- Bernoulli Joh.* Die erste Integralrechnung. Leipzig — Berlin, 1914.
- Bernoulli Joh.* Die Differentialrechnung. Leipzig, 1924.
- Briggs H.* Arithmetica logarithmica. Londini, 1624.
- Bürgi J.* Arithmetische und geometrische Progress-Tabulen sambt gründlichem Unterricht, wie solche nützlich in allerley Rechnungen zu gebrauchen und verstanden werden sol. Prag, 1620.
- Cataldi P.* Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra delli numeri. Bologna, 1613.
- Descartes R.* Oeuvres. Ed. Ch. Adam et P. Tannery, v. 1—12. Paris, 1897—1913.
- Geometria à Renato des Cartes ... in Latinam linguam versa, et Commentariis illustrata, opera atque studio Francisci à Schooten... Amstelædami, 1659 — 1661 (2-е лат. изд.).*
- Les écrits mathématiques de G. Desargues.* — В кн.: *R. Taton.* L'oeuvre mathématique de G. Desargues. Paris, 1951.
- Fermat P.* Oeuvres. P. Ed. Tannery et Ch. Henry, v. 1—5. Paris, 1891—1922.
- Galilei G.* Opere. Ed. A. Favaro. v. 1—21. Firenze, 1929—1939.
- Ghetaldi M.* Opera omnia, ed. Z. Dadić, Zagreb, 1968.
- Girard A.* Nouvelle invention en l'algèbre. Amsterdam, 1629.
- Gregorii a S^{to} Vincentio.* Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum conii, v. 1—2. Antverpiae, 1647.
- Gregory J.* Vera circuli et hyperbolae quadratura. Pataviae, 1667.
- Gregory J.* Geometriae pars universalis. Pataviae, 1668.
- Gregory J.* Exercitationes geometricae. Londini, 1668.
- Harriot T.* Artis analyticae praxis. Londini, 1631.
- Huygens C.* Oeuvres complètes. v. 1—22. La Haye, 1888—1950.
- Kepler J.* Gesammelte Werke, Bd. 1—18. Hsbg. W. van Dyck und M. Caspar. München, 1937—1963.
- De La Hire P.* Nouveaux éléments de sections coniques. Paris, 1679.
- Leibniz G. W.* Mathematische Schriften, Bd 1—7. Hsbg. C. I. Gerhardt. Berlin — Halle, 1849—1863.
- Leibniz G. W.* Opusculs et fragments inédits. Ed. L. Couturat. Paris, 1903.
- L'Hospital G. F. de.* Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes. Paris, 1696.
- L'Hospital G. F. de.* Traité analytique des sections coniques. Paris, 1707.
- Napier J.* Mirifici logarithmorum canonis descriptio ejusque usus. Edinburgi, 1614.
- Napier J.* Mirifici logarithmorum canonis constructio et eorum ad naturales ipsorum numeros habitudines. Edinburgi, 1619.
- Napier J.* The construction of the wonderful canon of logarithmus. Transl. with notes by W. R. Macdonald. Edinburgh — London, 1889.

- Newton I.* Opera quae extant omnia, v. 1—5. S. Ed. Horsley. Londini, 1779—1785.
The mathematical papers of Isaac Newton, v. I—III. Ed. by D. T. Whiteside with the assistance in publication of M. A. Hoskin. Cambridge, 1967—1969.
Pascal B. Oeuvres, v. 1—14. Publ. par L. Brunschvicg, P. Bourtroux et F. Gazier, Paris, 1908—1925.
Torricelli E. Opere, v. 1—4. Ed. G. Loria e G. Vassura. Firenze, 1919—1944.
Wallis J. Opera mathematica, v. 1—3. Oxoniae, 1693—1695.

3. Переписка ученых

- Bernoulli Joh.* Der Briefwechsel. Bd. I, hrsgb. O. Spiess Basel, 1955 (главную часть тома составляет переписка И. Бернулли с Лопиталем).
Edleston T. Correspondence of I. Newton. R. Cotes etc. London, 1850.
Gerhardt C. I. Der Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikern, Bd 1. Berlin, 1898.
Mersenne M. Correspondance, v. 1—4. Paris, 1932—1955.
Newton I. The correspondence, v. 1—4. Ed. H. W. Turnbull and J. F. Scott. Cambridge, 1959—1967.
Rigaud S. J. Correspondence of scientific men of the 17th century, v. 1—2. Oxford, 1841.
Переписка Галилея, Декарта, Ферма, Паскаля, Гюйгенса и Лейбница опубликована в указанных выше собраниях сочинений (Лейбница — не полностью).

4. Биографии; общие вопросы творчества

- Асмус В. Ф.* Декарт. М., 1956.
Вавилов С. И. Исаак Ньютон. Научная биография и статьи. М., 1961.
Выгодский М. Я. Галилей и инквизиция, т. I. М., 1934.
Гессен Б. М. Социально-экономические корни механики Ньютона, М.—Л., 1934.
Кузнецов Б. Г. Галилей. М., 1964.
Кляус Е. М. Блез Паскаль.— В сб.: У истоков классической науки. М., 1968, стр. 255—326.
Фрейман Л. С. Ферма, Торричелли, Роберваль.— В сб.: У истоков классической науки, М., 1968, стр. 173—254.
Франкфурт У. И., Френк А. М. Христиан Гюйгенс. М., 1962.
Bell E. T. Men of mathematics. N. Y., 1962 (содержит, в частности краткие биографии и характеристики творчества Декарта, Ферма, Паскаля, Ньютона и Лейбница).
Fleckenstein J. O. Johann und Jacob Bernoulli. Basel, 1949.
Fleckenstein J. O. Gottfried Wilhelm Leibniz. München, 1968.
Hofmann J. E. Frans van Schooten der Jüngere. Wiesbaden, 1962.
Koyré A. Etudes galiléennes, v. I—III. Paris, 1940.
Scriba C. J. Studien zur Mathematik des John Wallis (1616—1703). Wiesbaden, 1966.
Serres M. Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques, t. I—II. Paris, 1968.
Taton R. L'oeuvre mathématique de G. Desargues. Paris, 1951.
Wolf R. Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz. Bd. 1—4. Zürich (1 том содержит биографию Я. Бернулли, 2 том — И. Бернулли).

5. Мемориальные сборники

- Галилео Галилей (1564—1642). Сборник к трехсотлетию со дня смерти. Под редакцией А. М. Деборина, М.—Л., 1943.
Исаак Ньютон (1648—1727). Сборник статей к трехсотлетию со дня рождения. Под редакцией С. И. Вавилова, М.—Л., 1943.
Московский университет — памяти Исаака Ньютона. М., 1946.
Actes du symposium international «La géométrie et l'algèbre au debut du XVII siècle» à l'occasion du quatrième centenaire de la naissance de Marin Getaldić, Dubrovnik, 29.IX — 3.X 1968. Zagreb, 1969.
James Gregory. Tercentenary memorial volume, containing his correspondence with John Collins and his hitherto unpublished mathematical manuscripts. Ed. H. W. Turnbull. London, 1939.
Leibniz, sein Leben, seine Werke, seine Welt. Hsg. W. Totok und K. Haase. Hannover, 1966. (Обзор математического творчества написан И. Э. Гофманом).

Napier Tercentenary Memorial Volume. Ed. C. C. Knott. London, 1915.
 Pascal et les mathématiques. Rev. histoire sci. et applic., 1962, v. 15, N 3—4.
 E. W. von Tschirnhaus und die Frühaufklärung in Mittel- und Osteuropa, Hsg.
 E. Winter. Berlin, 1960. (статья о Чирнгаузе как математике и физике принадлежит
 О. Фольку [O. Volk]).

6. Литература к I главе

Бернал Дж. Наука в истории общества. Перевод А. М. Вязьминой, Н. М. Макаровой,
 Е. Г. Панфилова. Редакция Б. М. Кедрова, И. В. Кузнецова. М., 1956 (особенно
 глава 7 «Научная революция», стр. 203—276).
 Даниелман Ф. История естествознания, т. II (от эпохи Галилея до середины XVIII века).
 Перевод П. С. Юшкевича. М.— Л., 1935.
 Энгельс Ф. Диалектика природы. Госполитиздат, 1969.
 Dijksterhuis E. J. Die Mechanisierung des Weltbildes. Berlin — Göttingen — Heidelberg,
 1956.
 Hall A. R. The scientific revolution 1500—1800. London, 1954.
 Harig G. Die Tat des Kopernikus. Die Wandlung des astronomischen Weltbildes im 16
 und 17 Jahrhundert. Leipzig — Jena — Berlin, 1962.
 Koyré A. From closed world to the infinite universe. Baltimore, 1967.
 Koyré A. Les origines de la science moderne. Une interprétation nouvelle.— В кн.:
 A. Koyré. Etudes d'histoire de la pensée scientifique. Paris, 1966, p. 48—72.
 Ornstein M. The role of scientific societies in the seventeenth century. 2nd ed. Chicago,
 1928.

7. Литература ко II главе

Башмакова И. Г. О доказательстве основной теоремы алгебры.— ИМИ, 1957, т. X,
 стр. 257—304.
 Башмакова И. Г. Об одном вопросе теории алгебраических уравнений в трудах
 И. Ньютона и Э. Варинга.— ИМИ, 1959, т. XII, 431—456.
 Танири Ж., Моэль Ж. Основные принципы арифметики. Перевод П. С. Юшкевича.—
 В сб.: Новые идеи в математике, № 4, СПб., 1913.
 Юшкевич А. П. Декарт и математика.— В кн.: Р. Декарт. Геометрия. М.— Л., 1938,
 стр. 255—294.
 Юшкевич А. П. О «Всеобщей арифметике» И. Ньютона.— В кн.: И. Ньютон. Всеоб-
 щая арифметика. М., 1948, стр. 347—391.
 Яновская С. А. Мишель Ролль, как критик анализа бесконечно малых.— Труды Ин-та
 естествознания, М.— Л., 1947, т. X, 327—346 (О «теореме Ролля» см. стр. 328—
 335).
 Чеботарев Н. Г. Многоугольник Ньютона и его роль в современном развитии матема-
 тики.— В сб.: Исаак Ньютон. М.— Л., 1943, стр. 99—126.
 Bostmans H. La première édition de la «Clavis mathematica» d'Oughtred.— Annales Soc.
 scient. Bruxelles, 1911, v. 35, 24—78.
 Lohne J. Thomas Harriot als Mathematiker.— Centaurus, 1965, v. XI, 19—45.
 Tanner R. C. H. Thomas Harriot as mathematician.— Physis, 1967, IX, 235—247,
 258—292.

8. Литература к III главе

Абельсон И. Б. Рождение логарифмов. М.— Л., 1948.
 Успенский Я. В. Очерк истории логарифмов. Пг., 1923.
 Sajori F. History of the logarithmic slide rule. N. Y., 1909.
 Flad J. P., Taton R. Le calcul mécanique. Paris, 1963.
 Gieswald H. R. Justus Byrg als Mathematiker und dessen Einleitung in seine Logarithmen.
 Danzig, 1856.

9. Литература к IV главе

Башмакова И. Г. Обоснование теории делимости в трудах Е. И. Золотарева.— ИМИ,
 1949, т. II, 233—351. (О работах Ферма стр. 239—248).
 Hofmann J. E. Über zahlentheoretische Methoden Fermat's und Euler's, ihre Zusammen-
 hänge und ihre Bedeutung.— AHES, 1961, v. 1—2, 122—159.
 Wertheim G. Pierre Fermat's Streit mit John Wallis.— AGMW, Bd 9, 1889.

10. Литература к V главе

Кутлужуратов Дж. О развитии комбинаторных методов математики. Нукус, 1964.
Майстров Л. Е. Теория вероятностей. Исторический очерк. М., 1967.

11. Литература к VI главе

Глазголев Н. И. Ньютон как geometr.— В сб.: Московский университет — памяти Исаака Ньютона. М., 1946, стр. 71—80.
Мордухай-Болтовский Д. Д. Из прошлого аналитической геометрии.— Труды ИИЕ, 1952, т. IV, 216—235.
Яновская С. А. Геометрия Декарта. «Фронт науки и техники», 1937, стр. 6, 25—35.
Яновская С. А. О роли математической строгости в творческом развитии математики и специально о «Геометрии» Декарта.— ИМИ, 1966, т. XVII, 151—183. См. также статью А. П. Юпкевича в обоих русских изданиях «Геометрии» Декарта (стр. 288).
Coolidge J. The origin of analytic geometry. Osiris, v. I, 1936.
Fraiese A. Alle origini della geometria proiettiva.— Boll. Unione mat. ital., 1940, t. 18.
Turrière E. La notion de transcendence géométrique chez Descartes et Leibniz. L'inter-scendance leibnizienne et l'hypertranscendance.— Isis, 1914, v. 2, 106—124.
Wieleitner H. Marino Ghetaldi und die Anfänge der Koordinatengeometrie.— BM(3), 1912/13, Bd. 13, S. 242—247.
Wieleitner H. Zur Erfindung der analytischen Geometrie.— Z. math.-naturwiss. Unterricht, 1916, Bd. 47, 414—426.
Wieleitner H. Über die «Plani-coniques» von de La Hire.— Arch. Gesch. Naturwiss. und Techn., 1913, Bd 5, 49—55.
Wieleitner H. Über die ursprüngliche Form des Pascalschen Lehrsatzes.— Mitt. Gesch. Med. und Naturwiss., 1915, Bd 14, 157—162.

12. Литература к VII главе

Бажмутська Е. Я. Про роботи Блеза Паскаля з аналізу нескінченно-малых.— В сб.: Историко-математический збірник, III. Київ, 1962, стр. 7—27.
Башмакова И. Г. Диофант и Ферма (к истории метода касательных и экстремумов).— ИМИ, 1966, т. XVII, 185—207.
Выгодский М. Я. Иоганн Кеплер и его научная деятельность.— В кн.: *И. Кеплер.* Новая стереометрия винных бочек. М.— Л., 1935, стр. 5—94.
Крамар Ф. Д. Интеграционные методы Джона Валлиса.— ИМИ, т. XIV, 1961, стр. 11—100.
Лурье С. Я. Математический эпос Кавальери.— В кн.: *Б. Кавальери.* Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного. М.— Л., 1940, стр. 7—80.
Чуриков М. В. Из истории асимптотических рядов.— ИМИ, 1960, т. XIII, 441—472.
Agostini A. La teoria dei limiti in P. Mengoli.— Periodico di matematica (4), 1925, v. 5, 18.
Agostini A. Il concetto di integrale definito in P. Mengoli.— Periodico di matematica (4), 1925, v. 5, 137.
Bortolotti E. L'infinito ed il limite nel Rinascimento italiano.— Boll. Unione mat. ital., 1939, v. 17.
Bortolotti E. I primi algorithmi infiniti nelle opere dei matematici italiani del secolo XVIII.— Boll. Unione mat. ital., 1939, v. 17.
Bortolotti E. L'opera geometrica di Evangelista Torricelli.— В кн.: *E. Torricelli.* Opere, v. IV. Faenza, 1944, p. 301—337.
Cassina U. Il concetto di limite in Luca Valerio a Pietro Mengoli.— Actes Sympos. Internat. sci. phys. et math. dans la premiere moitié du XVII-e siècle, Pise — Vinci. 16—18 Juin 1958, p. 8—18.
Cassina K. Storia del concetto di limite. В книге того же автора: Della geometria egiziana alla matematica moderna. Roma, 1961, p. 142—214.
Child J. M. The lectiones geometricae of Isaac Barrow.— Monist, 1916, v. 26.
Eneström G. Zur Geschichte der unendlichen Reihen in der Mitte des siebzehnten Jahrhunderts. BM(3), 1912, Bd. 12, 136—146.
Fellman E. A. Die mathematischen Werke von Honoratus Fabry.— Physis, 1959, v. 1.

- Hofmann J. E.* Das «Opus Geometricum» des Gregorius a. S. Vincentio und seine Einwirkung auf Leibniz. Berlin, 1941.
- Hofmann J. E.* Über die «Exercitatio geometrica» des M. A. Ricci.— Centaurus, v. IX, 139—193.
- Koyré A.* Bonaventura Cavalieri et la géométrie des indivisibles.— В кн.: A. Koyré. Etudes d'histoire de la pensée scientifique. Paris, 1966, p. 297—324.
- Rosenfeld L. R. F.* de — Sluse et le problème des tangentes.— Isis, 1928, v. 10, 419—434.
- Scriba C. J.* James Gregory's frühe Schritten zur Infinitesimalrechnung. Hessen, 1957.
- Scriba C. J.* Zur Lösung des 2. Debeauneschen Problems durch Descartes.— AHES, 1961, v. 1, N 4, 406—419.
- Walker E.* A study on the «Traité des indivisibles» of Gilles Personne de Roberval. N. Y., 1932.
- Wallner C. R.* Die Wandlungen des Indivisibilibenbegriffs von Cavalieri bis Wallis.— BM(3), 1903, Bd. 4, S. 28—47.
- Wallner C. R.* Über die Entstehung des Grenzbegriffs.— BM (3), 1903, Bd. 4, 246—259.
- Wallner C. R.* Entwicklungsgeschichtliche Momente bei Entstehung des Infinitesimalrechnung.— BM (3), 1904, Bd. 5, 113—124.
- Wieleitner H.* Das Fortleben der Archimedischen Infinitesimalmethoden bis zum Beginn des 17. Jahrh., insbesondere über Schwerpunkbestimmungen, QS (B), 1930, Bd. I, 201—220.
- Wieleitner H.* Über Keplers «Neue Stereometrie der Fässer».— В сб.: Kepler — Festschrift, Rehensburg, 1930, p. 279—313.
- Zeuthen H. G.* Notes sur l'histoire des mathématiques, IV. Sur les quadratures avant le calcul intégral et en particulier sur celle de Fermat, VII, Barrow. Le maître de Newton. Bull. Acad. sci. Danemark, 1895, p. 37—80. Смотрите также работу D. T. Whiteside, указанную на стр. 288.

13. Литература к VIII главе

- Антропова В. И.* О геометрическом методе «Математических начал натуральной философии» И. Ньютона.— ИМИ, 1966, т. XVII, 205—228.
- Богомолов С. А.* Общие основания Ньютонова метода первых и последних отношений.— Изв. физ.-матем. об-ва при Казанском ун-те, 2-я серия, 1916, т. XXII, № 2.
- Богомолов С. А.* Актуальная бесконечность. Л.— М., 1934.
- Колмогоров А. Н.* Ньютон и современное математическое мышление.— В сб.: Московский университет — памяти Исаака Ньютона. М., 1946, стр. 27—42.
- Грамар Ф. Д.* Вопросы обоснования анализа в трудах Валлиса и Ньютона.— ИМИ, 1950, т. III, 486—508.
- Лузин Н. Н.* Ньютонова теория пределов.— В сб.: Исаак Ньютон. М.— Л., стр. 53—74.
- Лурье С. Я.* Предшественники Ньютона в философии бесконечно малых.— В сб.: Исаак Ньютон. М.— Л., 1943, стр. 75—98.
- Маркс К.* Математические рукописи. М., 1968.
- Рыбников К. А.* О так называемых творческих и критических периодах в истории математического анализа.— ИМИ, 1955, т. VII, 643—655.
- Рыбников К. А.* О роли алгоритмов в истории обоснования математического анализа.— Труды ИИЕТ, 1957, т. 17, 287—299.
- Рыбников К. А.* Об алгебраических корнях дифференциального исчисления.— ИМИ, 1958, т. XI, стр. 583—592.
- Штукан А. Б.* Интегрирующий механизм Лейбница.— Успехи матем. наук, 1952, т. VII, вып. 1(47), 191—194.
- Юшкевич А. П.* Лейбниц и основание анализа бесконечно малых.— Успехи матем. наук, 1948, т. III, вып. 1(23), 150—165.
- Яновская С. А.* О математических рукописях К. Маркса.— В сб.: Марксизм и естествознание. М., 1933, стр. 136—180.
- Яновская С. А.* Мишель Ролль как критик анализа бесконечно малых.— Труды ИИЕ, 1947, т. I, 327—346.
- Braunmühl A.* Beiträge zur Geschichte der Integralrechnung bei Newton und Cotes.— BM(3), 1904, Bd 5, 335—365.
- Cajori F.* A history of the conceptions of limits and fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse. Chicago — London, 1919.
- Costabel P.* Pierre Varignon et la diffusion en France du calcul différentiel et intégral. Paris, 1965.
- Eneström E.* Die erste Herleitung von Differentialen trigonometrischer Funktionen.— BM(3), 1909, Bd. 9, 200—205.

- Eneström E.* Über die erste Aufnahme der Leibnizschen Differentialrechnung.— BM(3), 1909, Bd. 9, 300—320.
- Fleckenstein J. O.* Die Prioritätstreit zwischen Leibniz und Newton. Basel, 1956.
- Fleckenstein J. O.* Die Taylorsche Formel bei Johann I Bernoulli.— Elemente der Mathematik, 1946, v. I, S. 13—17.
- Hofmann J. E.* Aus der Frühzeit der Infinitesimalmethoden. Auseinandersetzung um die algebraische Quadratur der algebraischen Kurven in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts.— AHES, 1965, v. 2, N 2, 270—343.
- Hofmann J. E.* Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik während des Aufenthaltes in Paris (1672—76). München, 1949.
- Hofmann J. E.* Über Jacob Bernoullis Beiträge zur Infinitesimal-Mathematik. Genf, 1956.
- Malebranche N.* Oeuvres complètes, v. XVII—2, Mathematica, Ed. P. Costabel, Paris, 1968.
- Mahnke D.* Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis.— Abhandl. Akad. Wiss. Berlin, Phys.-math. Kl., 1925, Bd 1.
- Mahnke D.* Zur Keimesgeschichte der Leibnizschen Differentialrechnung.— Sitzungsber. Ges. Beförderung ges. Naturwiss. Marburg, 1932, Bd 67.
- Scriba C. J.* The inverse method of tangents; a dialogue between Leibniz and Newton.— AHES, 1964, v. 2, N 2, 113—137.
- Whiteside D. T.* The mathematical principles underlying Newton's «Principia mathematica». Journal for the history of astronomy, 1970. v. 1, p. 116—138.
- Zeuthen H. G.* Notes sur l'histoire de mathématiques: V. Sur le fondement mathématique du calcul infinitésimal, VI. Sur quelques critiques faites de nos jours à Newton.— Bull. Acad. sci. Danemark, 1895, p. 193—278. См. также работу D. T. Whiteside, указанную на стр. 288.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абель (N. H. Abel, 1802—1829) 230
 Абельсон И. Б. 291
 Августин (Augustinus Aurelius, 354—430) 267
 Агостини (A. Agostini) 292
 Адам (Ch. Adam) 289
 Андерсон (A. Anderson, 1582—1619) 137, 171
 Антропова В. И. (р. 1924) 293
 Апиан Петр (Petrus Apianus, Peter Bienenwitz, 1495—1552) 83
 Аполлоний (Ἀπολλώνιος, ок. 260—ок. 170 до н. э.) 15, 70, 99, 100, 102, 107, 109, 112, 141, 203, 218
 Арган (J. R. Argand, 1768—1822) 137
 Арди (Claude Hardy, ум. 1678) 199
 Аристотель (Ἀριστοτέλης, 384—322 до н. э.) 140
 Арно (Antoine Arnauld, 1612—1694) 36
 Архимед (Ἀρχιμήδης, 287—212 до н. э.) 14—16, 54, 56, 70, 83, 99, 130—141, 166—170, 175, 177, 180, 181, 191—193, 203, 222, 274, 276, 281
 Асмус В. Ф. 290
 Барроу (Isaac Barrow, 1630—1677) 20, 100, 138, 141, 144, 180, 193, 202—206, 211—216, 218, 250, 254, 263, 292, 293
 Бартолин (Бертельсен, Erasmus Bartholinus, он же Rasmus Berthelsen, 1625—1698) 44
 Баумгарт К. К. 12, 288
 Бахмутская Э. Я. (р. 1916) 292
 Баше де Мезириак (Claude Gaspard Bachet de Meziriac, 1581—1638) 15, 70, 72, 73, 75, 77
 Башмакова И. Г. (р. 1921) 291, 292
 Бекман (Isaac Beekman, 1588—1637) 26, 31, 32, 271
 Белл (E. T. Bell) 290
 Бернал (J. D. Bernal, р. 1901) 291
 Бернигерот (M. Bernigeroth, 1670—1733) 249
 Бернулли Даниил I (Daniel Bernoulli, 1700—1782) 95, 269, 276
 Бернулли Иоганн I (Johann Bernoulli, 1667—1748) 20, 38, 61, 63, 95, 113, 146, 147, 159, 188, 210, 245, 248, 251, 255, 256, 267—281, 284—287, 289, 290, 294
 Бернулли Иоганн II (Johann Bernoulli, 1710—1790) 95
 Бернулли Николай (Niklaus Bernoulli, 1623—1708) 92
 Бернулли Николай (Niklaus Bernoulli, 1662—1716) 93
 Бернулли Николай I (Nikolaus Bernoulli, 1687—1759) 95, 96, 269
 Бернулли Николай II (Nikolaus Bernoulli, 1695—1726) 95, 269
 Бернулли Яков I (Jacob Bernoulli, 1654—1705) 16, 20, 30, 82, 85, 86, 89—97, 159, 163, 206, 210, 248, 251, 256, 267, 268, 271—277, 280, 284, 287—290, 294
 Бернулли Яков II (Jacob Bernoulli, 1759—1789) 95
 Де Билль (Jacques de Billy, 1602—1679) 70, 78
 Богомолов С. А. 293
 де Богран (Jean de Beaugrand, ум. 1640) 234
 Бойль Р. (Robert Boyle, 1627—1691) 11, 18
 Бомбелли (Rafael Bombelli, ок. 1526—1573) 15, 25, 38
 Борелли (Giovanni Alfonso Borelli, 1608—1679) 15, 268
 Бортоллотти (Ettore Bortolotti, 1866—1947) 292
 Босманс (Henri Bosmans, 1852—1928) 291
 Браге Тихо (Tycho Brahe, 1546—1601) 8
 Брэдвардин (Брадуардин, Thomas Bradwardine, ок. 1290—1349) 172
 Браунмюль (August von Braunmühl, 1893—1908) 293
 Бремикер (C. Bremiker, 1804—1877) 62
 Бреншвиц (L. Brunschvicg) 290
 Бригс (Henry Briggs, 1561—1631) 36, 61—63, 155—157, 162, 171, 289
 Броункер (Бронкер, William Brouncker, 1620—1684) 18, 40, 63, 70, 76, 155, 158—162, 215, 255
 Бруно (Giordano Bruno, 1548—1600) 8, 20
 Бугаев Н. В. (1837—1903) 51
 Бутру (P. Bouteux, 1880—1922) 290
 Вакон Ф. (F. Bacon, 1561—1626) 12, 18
 Бюрги (Jobst Bürgi, 1552—1632) 55—57, 61, 142, 289, 291

1 В скобках указаны: 1) более точное — в сравнении с принятым у нас — русское написание некоторых английских и голландских фамилий; 2) другое написание фамилий; 3) более полное написание фамилий и имен; 4) даты рождения и смерти или примерное время жизни упомянутого лица.

- Вавилов С. И. (1891—1951) 290
 Валерио (Luca Valerio, 1552—1618) 131—138, 172, 292
 Валленштейн (A. Wallenstein, 1583—1634) 119
 Валлис (Уоллис, John Wallis, 1616—1703) 18, 20, 36—49, 56, 61, 70, 76, 85, 110—114, 128, 129, 143, 152—155, 162, 163, 178, 181—183, 188, 192, 203, 215, 216, 220, 229, 237, 250—255, 290—293
 Вальнер (C. R. Wallner) 293
 Ванцель (P. L. Vantzel, 1814—1848) 43
 де Вард (C. de Waard) 197
 Варинг (Уэринг, Edward Waring, 1734—1798) 46, 128, 291
 Варишон (Pierre Varignon, 1654—1722) 267—271, 282, 283, 285, 293
 Вассура (G. Vassura) 290
 фон Вега Г. (G. F. von Vega, 1754—1802) 62
 Вейерштрасс К. (Karl Th. W. Weierstrass, 1806—1871) 35, 138
 Вейль А. (Andre Weil) 80
 Вейль Г. (Herman Weyl, 1885—1955) 273
 Вертгейм (G. Wertheim) 291
 Вессель (C. Wessel, 1745—1818) 37
 Вивинани (Vincenzo Viviani, 1622—1703) 188
 Виет (Виета, François Viète, 1540—1603) 15, 20—26, 29, 33, 42, 44, 47, 53, 77, 98, 101, 107, 110, 133, 137, 142, 148, 149, 193, 216, 227, 273
 Вилейтнер (Heinrich Wieleitner, 1874—1931) 292, 293
 Винтер (E. Winter) 291
 Витело (Witelo, ок. 1225 — ок. 1280) 120
 де Витт (Jan de Witt, 1625—1672) 20, 30, 97, 101, 110, 112
 Вольтер (F. M. Voltaire, 1694—1778) 139, 222, 250
 Вольф Р. (R. Wolf) 290
 Вольф Х. (Ch. von Wolff, 1679—1754) 35, 100, 147, 267
 Выгодский М. Я. (1898—1965) 169, 288—290, 292
 Вязьмина А. М. 291
 Газье (F. Gazier) 290
 Галилей (Galileo Galilei, 1564—1642) 8—12, 17, 18, 20—22, 26, 28, 82, 83, 131, 141, 172—175, 178, 187, 188, 193, 200, 205, 206, 271, 288—291
 Галлей (Халли, E. Halley, 1656—1742) 15, 49, 91, 92, 96, 97, 162, 163, 220
 Гальс Ф. (F. Hals, ум. 1666) 27
 Гардинер (W. Gardiner, ок. 1742) 61
 Гарнье (J. G. Garnier, 1766—1840) 102
 Гарриот (Хэриот, Thomas Harriot, 1560—1621) 22—25, 41, 42, 181, 289, 291
 Гаррисон (John Harrison, 1693—1776) 13
 Гаспар (M. Caspar) 289
 Гаусс (Carl. Friedrich Gauss, 1777—1855) 25, 36, 43, 75, 80, 83
 Гейберг (J. L. Heiberg, 1854—1928) 14, 15
 ван дер Гейден (J. van der Heiden) 119
 Генри (Ch. Henry) 289
 Гераклит Эфесский (Ἡράκλειτος, ок. 530—470 до н. э.) 140
 Герман (I. Hermann, 1678—1733) 95, 269
 Герхард (C. I. Gerhardt) 252, 256, 289, 290
 Гессен Б. М. 290
 Геталдич (Гетальди, Marin Getaldic, 1566—1627) 98, 99, 289, 290, 292
 Гешауф (Венаториус, Thomas Gechauff, Venatorius, 1490—1551) 15
 Гисвальд (H. R. Gieswald) 291
 Глаголев Н. А. (1888—1945) 292
 Гоббс (Thomas Hobbes, 1588—1679) 18
 Гольдбах (Christian Goldbach, 1690—1764) 49, 73, 78, 246
 Гольцман — Ксиладер (Wilhelm Holtzman, Xylander, 1532—1576) 15
 Гюль (Jacob Gool(ius), 1596—1667) 32, 106
 Гофман (J. E. Hofmann, р. 1900) 288, 290, 291, 293, 294
 Грассман (Hermann Grassman, 1809—1877) 127
 Граунт (John Graunt 1620—1674) 90, 91, 98
 Грегори (James Gregory, 1638—1675) 20, 132, 137, 143, 148—152, 155, 157, 158, 162, 165, 166, 180, 193, 202, 203, 211, 218, 234, 244, 250, 254, 270, 289, 290, 293
 Гримальди (F. M. Grimaldi, 1618—1663) 8
 Гринусе (Simon Grynaeus, 1493—1541) 14
 Гудде (Хюдде, Johannes Hudde, 1628—1704) 20, 30, 41, 45, 46, 162, 195, 196, 199, 202
 Гук (Robert Hooke, 1635—1703) 8, 11, 18, 218, 219
 Гульдин (Paul Guldin, 1577—1643) 137, 171, 176, 189
 Гунтер (Edmund Gunter, 1581—1626) 62, 66
 ван Гутшофен Гергард (Хютсховен, Gerhard van Gutschoven, ок. 1674) 206
 де Гюа де Мальв (J. P. de Gua de Malves, 1712—1785) 51, 115
 Туйгенс К. (Хейхенс. K. Huygens) 88
 Гюйгенс Х. (Хейхенс, Christian Huygens, 1629—1695) 8—13, 18, 20, 30, 39, 70, 86, 88—90, 95—99, 111, 127, 151, 188, 191, 192, 195, 199, 202, 203, 206—210, 219, 250, 251, 255, 264, 266, 268, 269, 271, 280, 287—290
 Даламбер (Jean le Rond d'Alembert 1717—1783) 25, 38, 222, 281
 Даннеман Ф. 291
 Данте Алигьери (Dante Alighieri, 1265—1321) 81, 82
 Дебон (Florimond Debeaune, 1601—1652) 20, 26, 30, 45, 108, 110, 163, 164, 211, 262

- Деборин А. М. 290
 Дедекинд (J. W. R. Dedekind, 1831—1916) 35, 80
 Дезарг (Girard Desargues, 1591—1661) 16, 20, 26, 113, 116, 121—126, 289, 290
 ван Дейк (W. van Dyck) 289
 Дайкстерхейс (E. J. Dyksterhuis) 291
 Декарт (Rene Descartes, Cartesius, 1596—1650) 8—13, 16, 17, 20, 22—37, 40—46, 51, 53, 70, 72, 88, 98—117, 121, 124, 137, 139—143, 148, 161, 163, 164, 180, 181, 184, 188, 191—203, 206, 211, 215, 216, 233, 250, 253, 267, 273, 275, 288—293
 Демокрит из Абдер (Δημόκριτος, ок. 460 — ок. 380 до н. э.) 130
 Деттонвиль А. (см. Паскаль, А. Dettonville)
 Джакомо Кремонский (Jacopo, Giacomo, ум. ок. 1452) 15
 Джонс (William Jones, 1675—1749) 61
 Диофант (Διοφάντος, III в.) 15, 31, 70, 72—79, 140, 196, 292
 Дирихле Лежен (P. G. Lejeune Dirichlet, 1805—1859) 76
 Диттон (Humphzey Ditton, 1675—1715) 286
 Домá Ж. (J. Daumas) 87
 Евдокс Книдский (Εὐδόξος, ок. 406—ок. 355 до н. э.) 33, 130
 Евклид (Εὐκλείδης, 365 — ок. 300 до н. э.) 13, 14, 33, 34, 56, 70, 73, 83, 84, 128, 129, 140, 203, 216, 274
 Евтокий (Εὐτόκιος, VI в. до н. э.) 15
 Жергон (J. D. Gergonne, 1771—1859) 123
 Жирар (Albert Girard, 1595—1632) 20—25, 35, 36, 41, 42, 46, 98, 129, 135, 271, 289
 Зегнер (Johann Andreas von Segner, 1704—1777) 42
 Зенон Элейский (Ζήνων, 490? — 430? до н. э.) 134, 140
 Золотарев Е. И. (1847—1878) 80, 291
 Зоммерфельд (Sommerfeld) 11
 Зубов В. П. (1899—1963) 141
 Ибн Корра (Сабит, 836—901) 185
 Ибн ал-Хайсам (965—1039) 85, 100, 120, 177
 Игнациус Г. И. (1895—1968) 289
 д'Имола Бенвенуто (Benvenuto d'Imola, XV в.) 81, 82
 Имплинский Ю. А. 288
 Кавальери (Bonaventura Cavalieri, ок. 1598—1647) 20, 21, 36, 100, 134, 137—139, 141, 158, 167, 171—181, 184, 187, 189, 191, 215, 241, 250, 289, 292, 293
 Кампано (Giovanni Campano, XIII в.) 13
 Кантор Г. (Georg Cantor, 1845—1918) 173
 Кантор М. (Moritz Cantor, 1829—1920) 288
 Кардано (G. Cardano, 1501—1576) 11, 24, 82, 90, 92
 де Каркави (Pierre de Carcavy, ум. 1684) 70, 79
 Карл II (король Англии, 1630—1685, 203
 Карно (L. Carnot, 1753—1823) 126, 127, 282
 Карре (Louis Carré, 1663—1711) 285, 286
 Кассина (U. Cassina) 292
 Кастелли (Benedetto Castelli, 1578—1643) 174
 Каталди (Pietro Antonio Cataldi, 1548—1626) 38, 39, 289
 Кауфман Николай (см. Меркатор, Kaufmann)
 ал-Кати (ум. 1429 или 1436) 99
 Кедров Б. М. (р. 1903) 291
 Кемпе (A. B. Kempe, 1849—1912) 32, 44, 104
 Кеплер (Johannes Kepler, 1571—1630) 8, 9, 11, 20, 54, 55, 63, 67, 117—121, 126, 133, 136, 137, 139, 166—174, 177, 193, 206, 215, 289, 292, 293
 Кестнер (A. G. Kästner, 1719—1800) 35, 132
 Клавий (Christoph Clavius, Schlüssel 1537—1612) 98, 132, 137
 Клеро (A. C. Clairaut, 1713—1765) 113, 222
 Кляус Е. М. 290
 Кнеллер (G. Kneller, XVII в.) 217
 Кнот (C. C. Knott) 290
 Койре (A. Koyré) 290, 291, 293
 Коллинс (John Collins, 1625—1683) 18, 149, 157, 164—166, 218, 270, 290
 Колмогоров А. Н. (р. 1903) 245, 293
 Кольбер (J. B. Colbert, 1619—1683) 18, 83
 Кольсон (John Colson, 1680—1760) 219
 Коммандино (Federigo Commandino, 1509—1575) 15, 99, 131, 132, 135, 172
 Копелевич Ю. X. 289
 Коперник (Nicolaus Copernicus, 1473—1543) 7, 8, 56
 Костабель (P. Costabel) 293, 294
 Коутс (Roger Cotes, 1682—1716) 220
 Коши (A. Cauchy, 1789—1857) 75, 138, 245, 266, 282
 Крамар Ф. Д. (р. 1911) 282, 293
 Крамер (G. Cramer, 1704—1752) 51, 53, 269
 Крамп (Ch. Kramp, 1760—1826) 153
 Крег (John Craig, 1660—1731) 266
 Кромвель (O. Cromwell, 1599—1658/36)
 Кронекер (L. Kronecker, 1823—1891) 35, 80
 Крылов А. Н. (1863—1945) 109, 226, 289
 Кузнецов Б. Г. (р. 1903) 290
 Кузнецов И. В. 291
 Кулидж (J. L. Coolidge) 292
 Куммер (E. Kummer, 1810—1893) 80
 Кутлумуратов Дж. 292
 Кутюра (L. Couturat) 289

Каджори (F. Sajori, 1859—1930) 59,
146, 182, 291, 293
Кэли (A. Cayley, 1821—1903) 53
Кюнн (H. Kühn, 1690—1769) 37
де Лакир (Philippe de La Hire, 1640—
1718) 100, 113, 124—126, 289, 292

Лагранж (J. L. Lagrange, 1736—1813)
16, 23, 25, 43, 51, 75—77, 80, 165,
224, 236, 281
Лакруа (S. F. Lacroix, 1765—1843)
102, 235

Ламберт (J. H. Lambert, 1728—1777)
129

Лаплас (P. S. Laplace, 1749—1827) 25,
83, 165

Леви бен Гершон (Лев Герсонид, 1288—
1344) 84, 85

Леви Н. В. (р. 1907) 284, 289

Лекандр (A. M. Legendre, 1752—1833)
165

Лейбниц (Gottfried Wilhelm Leibniz,
1646—1716) 11—13, 17—23, 28, 35—
41, 46—53, 63, 64, 69, 85, 94, 96,
100, 104, 106, 117, 124—127, 132, 133,
137, 139, 141, 144—152, 166, 178, 189,
191, 200, 202, 210—215, 219, 220,
227—232, 235, 238, 240, 245—287, 289,
290, 292—294

Лели (P. Lely, 1618—1680) 40

Леони О. М. 173

Летников А. В. (1837—1888) 273

Листинг (J. B. Listing, 1808—1882) 127

Лиувилль (Joseph Liouville, 1809—1882)
273

Лобачевский Н. И. (1792—1856) 129

Лозинский М. 82

Лоне (J. Lohne) 291

де Лопиталь (G. F. A. de L' Hospital,
1661—1704) 20, 52, 163, 210, 248,
251, 267—271, 273, 275, 280, 284—
286, 289, 290

Лориа (Gino Loria) 290

Лузин Н. Н. (1883—1950) 293

Лурье С. Я. (1890—1965) 167, 289, 292,
293

Люка (E. Lucas, 1842—1891) 78

Люль Рамон (Ramón Lull, 1235? —
1315) 251

Мавролико (F. Maurolico, 1494—1575)
15, 84, 100, 131

Майстров Л. Е. (р. 1920) 292

Макарова Н. М. (р. 1932) 291

Макдональд (W. R. Macdonald) 289

Маклорен (Меклорин, Colin Maclaurin,
1698—1746) 114, 166

Мальбранш (N. Malebranche, 1638—
1715) 267, 269, 294

Манке (D. Mahnke, 1884—1939) 144,
294

Мариотт (E. Maziotte, ум. 1684) 11

Марков А. А. (1856—1922) 95

Маркс (Karl Marx, 1818—1883) 283, 293

Массо (J. Massau) 280

Мейбом (Meibom, Marqvard Mayba-
ш, 1630—1711) 113

Менголи (Pietro Mengoli, 1625—1686) 63,
132, 153, 158, 159, 161, 164, 211, 292

Мербеке (Willem von Moerbeke, ок.
1215 — ок. 1286) 15

Меркатор (Николай Кауфман, Nicolaus
Mercator, 1620—1687) 63, 143, 161,
215, 230, 253, 254

Меррей (T. Murray) 91

Мерсени (Marin Mersenne, 1588—1648) 17,
26, 70, 88, 101, 121, 133, 163, 184,
188, 196, 201, 206, 275, 290

Мерз (Ch. Merau, 1835—1911) 35, 131

Местлин Михаэль (1550—1631) 118

Мидорж (Claude Mydorge, 1587—1647)
26, 108, 112

Мизес (R. Mises, 1883—1958) 96

Мольк (J. Molk). 291

Монж (Gaspard Monge, 1746—1818) 247

дель Монте (Guidubaldo del Monte,
1545—1607) 121

Мопертюи (P. L. Moreau de Maupertuis,
1698—1759) 222

де Морган (A. de Morgan, 1806—1873) 157

Мордухай-Болотовской Д. Л. (1876—
1952) 116, 238, 289, 292

Мориз Нассауский 26

де Муавр (Abraham de Moivre, 1667—
1754) 52, 91, 92, 97

Муррайль (J. R. Mourraille, XVIII в.) 49

Мюллер (Реггиомонтан, Johann Müller.
Regiomontanus, 1436—1476) 15, 56

Нейгебайер (Otto Neugebauer, p. 1899) 288

Нейл (W. Neil, 1637—1670) 192

Непер (Нейпьер, Johan Neper, Napier,
1550—1617) 20, 55—66, 136, 141, 163,
184, 205, 215, 220, 289

Николай Кузанский (Nikolaus von Cues,
1401—1464) 187

Новиков П. С. (р. 1901) 288

Нуñez (P. Nuñez, 1502—1578) 42

Ньювентейт (Bernardo Nieuwentijt, 1654—
1718) 272, 281, 282

Ньютон (Isaac Newton, 1643—1727)
7—9, 11, 13, 16, 18, 20, 21, 25, 28,
35, 36, 40—52, 63, 84, 92, 96, 99,
104, 106, 109, 112, 114—117, 127,
128, 137—144, 149, 152, 155—158, 162,
164—166, 193, 194, 202—205, 210—
248, 250, 253, 255, 256, 259, 263—268,
278, 281, 282, 286—294

Ольденбург (H. Oldenburg, 1615—1677)
18, 47, 202, 211, 219, 230, 232, 250,
255, 256

Орем (Nicole Oresme, ок. 1323—1382)
9, 99, 100, 133, 141, 159, 174, 179

Орнштейн (M. Ornstein) 291

Отред (W. Oughtred, 1574—1660) 42,
63, 66, 99, 153, 181, 216

Панфилов Е. Г. 291

Панпен (Dénis Papin, 1647—1712) 252

- Панин (Πάνιος, III в.) 15, 31, 32, 70, 106, 121, 124, 137, 226
- Паран (A. Parent, 1666—1716) 113
- Пардис (G. Pardies, 1636—1673) 207, 219
- Партридж (S. Partridge, ок. 1662) 66
- Паскаль Б. (Blaise Pascal, 1623—1662) 8, 11, 16, 20, 36, 66, 68—70, 72, 75, 83—90, 116, 117, 124, 125, 135, 138, 153, 187—191, 203, 215, 250, 252, 255, 289, 290, 292
- Паскаль Э. (Etienne Pascal, 1588—1651) 86
- Пачоли (Luca Pacioli, ок. 1445 — ок. 1515) 82
- Пель (John Pell, 1611—1685) 76
- Перро К. (Claude Perrault, 1613—1688) 264
- Перро III. (Charles Perrault) 264
- Петр I (1672—1725) 18, 251
- Петти (William Petty, 1623—1687) 90, 91
- Пиков В. 29
- Платон (Πλάτων, 429—348 до н. э.) 17
- Понселе (J. V. Poncelet, 1788—1867) 126
- Поп (A. Pope, 1688—1744) 224
- Прокл Диадох (Πρόκλος Διάδοχος, 410—485) 112
- Птолемей Клавдий (Κλαύδιος Πτολεμαῖος, ум. ок. 170) 8, 14, 118, 121
- де Пуали (F. de Poilly) 71
- Пуанкаре (H. Poincaré, 1854—1912) 78, 80, 127
- Пуассон (S. Poisson, 1781—1840) 95
- Пуизе (V. Puiseux, 18120—1883) 51
- Раме (Рамус, P. de la Rameé, Ramus, 1515—1572) 188
- Рафсон (Joseph Raphson, 1648—1715) 47—49
- Рейномонтан (см. Мюллер)
- Рейно (Charles René Reyneau, 1656—1728) 285, 286
- Рекорд (R. Recorde, 1510—1558) 22, 41
- Рен (Christopher Wren, 1632—1723) 18, 20, 192, 218
- Рито (S. J. Rigaud) 290
- Риман (B. Riemann, 1826—1866) 127, 273
- Риччи (Michel Angelo Ricci, 1619—1692) 100, 193, 202, 203, 293
- Роберваль (Gilles Personne de Roberval, 1602—1675) 20, 26, 69, 138, 180, 181, 183, 187—189, 191, 193, 196, 199—201, 205, 215, 290, 293
- Робинсон (A. Robinson) 281
- Розенфельд (L. Rosenfeld) 293
- Ролль (Michele Rolle, 1652—1715) 46, 47, 52, 139, 271, 282, 285, 291, 293
- Роте (Peter Rothe, ум. 1617) 23—25
- Рулольф II (германский император, 1552—1612) 118
- Рыбкин Г. Ф. (р. 1903) 288
- Рыбников К. А. (р. 1913) 293
- де Сараса Альфонс Антон (Alfonso Antonio de Sarasa, 1618—1667) 133, 158, 185
- Сатаров И. (ок. 1740) 83
- Свепников Г. Н. 169, 289
- Секи Кова Шинсуке (1642—1708) 53
- Сен Венсан (Gregorius a St. Vincentio, 1584—1667), 63, 132—137, 158, 171, 185, 250, 289, 293
- Сервуа (F. J. Servois, 1767—1847) 123
- Серр (M. Serres) 290
- Сильвестр (J. J. Sylvester, 1814—1897) 46
- Симпсон (T. Simpson, 1710—1761) 157
- Синцов Д. М. (1867—1946) 51
- Скотт (J. F. Scott) 290
- Скриб (C. J. Scriba) 290, 293, 294
- де Слюз (René François de Sluse, 1622—1685) 202, 203, 206
- Слосарев Г. Г. 288
- Снелль (Willebrord Snell, 1581—1626) 8, 11, 13, 32, 135
- Спейделл (John Speidel) 63
- Спенс (J. Spence) 221
- Стевин (Simon Stevin, 1548—1620) 8, 11, 15, 20, 24, 25, 33, 121, 134, 135, 136, 222, 271
- Стирлинг (James Stirling, 1692—1770) 51, 165
- Суайнсхед (Свинсхед, R. Swineshead, ок. 1350) 141
- Суст (G. Soest) 37
- ван Схоотен (Frans van Schooten, 1615—1660) 30, 31, 44, 52, 70, 88, 89, 110—116, 192—196, 199, 290
- Таке (André Tacquet, 1612—1660) 83, 134—137, 171
- Таннер (R. C. H. Tanner) 291
- Таннери П. (P. Tannery, 1843—1904) 289
- Таннери Ж. (J. Tannery, 1848—1910) 291
- Тарталья (N. Tartaglia, 1500—1557) 11, 82, 83, 193
- Татон (R. Taton, р. 1915) 289—291
- Тейлор (B. Taylor, 1685—1731) 46, 49, 164, 166, 197, 244, 273, 274, 294
- Теплиц (O. Toeplitz) 288
- Тёрнбалл (H. W. Turnbull) 290
- Тимченко И. Ю. (1862—1939) 59, 182
- Торричелли (Evangelista Torricelli, 1608—1647) 8, 11, 20, 36, 163, 178—181, 188, 191, 193, 200, 205, 211, 212, 215, 290, 292
- Тоток (W. Totok) 290
- Трессдал (C. Truesdell) 288
- Турьер (E. Turière) 292
- ат-Туси (Насир ад-Дин, 1201—1274) 129
- Уайтсайд (D. T. Whiteside) 288, 290, 293, 294
- Уингейт (Edmund Wingate, 1593—1656) 66
- Уинстон (William Whinston, 1667—1752) 35
- Уокер (E. Walker) 138, 293
- Успенский Я. В. (1883—1947) 95, 288, 291

- Фабри (Honoré Fabry, 1607—1688) 188,
 189, 204, 250, 292
 Фаваро (A. Favaro) 289
 Фаульгабер (Johann Faulhaber, 1580—
 1635) 26, 85, 86, 156
 Фелльман (E. A. Fellmann) 292
 Феодосий (Θεόδωρος, I в. до н. э.) 203
 Ферма П. (Pierre Fermat, 1601—1665)
 16, 17, 20, 63, 70—80, 85—90, 100—
 103, 106—111, 124, 133, 137, 138,
 142, 143, 171, 177, 180—192, 196—
 206, 211, 215, 234, 254, 288—292
 Ферма С. (Samuel Fermat, 1630—1690) 73
 Флад (J. P. Flad) 291
 Флакк (Adriaen Vlacc, 1600—1667) 62
 Флекенштейн (J. O. Fleckenstein) 290,
 294
 Фольк (O. Volk) 291
 Фразе (A. Fraiese) 292
 Франкфурт У. И. 290
 Фредерикс В. К. 9, 288
 Фредерикс Н. 9, 288
 Фрейман Л. С. 290
 Френикль де Бесси (Bernard Frenicle de
 Bessy, 1605—1675) 70, 76, 85
 Френк А. М. 290
 Фурье (J. Fourier, 1768—1830) 46, 49
 Фуше (Foucher) 270
 Хайям Омар (1048—1131) 43, 45
 Хариг (G. Harig) 291
 Хасс (K. Haase) 290
 Хейрат (Hendrik van Neuraet, 1633—
 1660) 30, 192, 199
 Холл (A. R. Hall) 291
 Хорслей (S. Horsley) 290
 Хоскин (M. A. Hoskin) 290
 Христина (королева шведская, 1626—
 1689) 28
 Цамберти (Bartolomeo Zamberti, ок. 1505)
 14
 Цейтен (Hironymus Georg Zeuthen,
 1839—1920) 109, 288, 293, 294
 Чеботарев Н. Г. (1895—1947) 51, 291
 Чайдл (J. M. Child) 289, 292
 Чириков М. В. 292
 Чирнгауз (E. W. von Tschirnhaus,
 1651—1708) 51, 52, 210, 251—253,
 257, 261, 266, 267, 291
 Шаль (M. Chasles, 1793—1880) 17
 Шарп (Abraham Sharp, 1651—1739) 39
 Швентер (Daniel Schwenter, 1585—1636)
 39
 Шикард (Wilhelm Schickard, 1592—1635)
 66—69
 Шотт (Kaspar Schott, 1608—1666) 18
 Шпис (O. Spiess, 1878—1966) 258, 290
 Штаудт (Ch. von Staudt, 1798—1867) 127
 Штейнер (J. Steiner, 1796—1863) 116, 128
 Штифель (M. Stifel, 1486—1567) 22,
 54—56, 83
 Штурм (J. Ch. F. Sturm, 1803—1855) 46
 Штыкан А. Б. (p. 1906) 293
 д'Эггилон (Francois d'Aiguillon, 1566—
 1617) 121
 Эделинк (G. Edelinck, ум. 1707) 89, 270
 Эдельстон (T. Edelman) 290
 Эйлер Л. (L. Euler, 1707—1783) 16, 17,
 25, 31, 35, 36, 38, 40, 43, 49, 52, 61,
 73—80, 83, 86, 111, 127, 144, 147,
 155, 156, 159, 163, 165, 197, 222,
 224, 242, 246, 269, 273, 276, 283, 291
 Эйлер П. (Paul Euler) 95
 Эккеленсис (Abraham Ecchelensis, 1600—
 1664) 15
 Энгельс (Friedrich Engels, 1820—1895)
 7, 8, 17, 220, 221, 291
 Энестром (Gustav Eneström, 1852—
 1923), 288, 292—294
 Эратосфен (Ερατοσθένης, 276—194 до н. э.)
 103, 131, 170
 Эригон (Pierre Hérigone, ок. 1640) 83,
 84, 100, 196
 Юнг Иоахим (Joachim Jung, 1587—
 1657) 251, 271
 Юшкевич А. П. (p. 1906) 34, 35, 53,
 284, 288, 289, 291—293
 Юшкевич П. С. (1873—1945) 109, 291
 Яновская С. А. (1896—1966) 282, 291—
 293

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ С ДРЕВНЕЙШИХ ВРЕМЕН ДО НАЧАЛА XIX СТОЛЕТИЯ

Том II

МАТЕМАТИКА XVII СТОЛЕТИЯ

Утверждено к печати Институтом истории естествознания и техники

Редактор А. Ф. Лапко Художественный редактор А. Н. Власик
 Художник М. К. Шевцов Технический редактор В. Г. Лаурт

Сдано в набор 20/VII 1970 г. Подписано к печати 11/XII 1970 г.
 Формат 70х100/16 Бумага № 1. Усл. печ. л. 24,18 Уч.-изд. л. 21,4 Т-17683
 Тираж 7200 Тип. зак. 1030

Цена 1 р. 73 к. §

Издательство «Наука», Москва К-62, Подосенский пер., 21

2-я типография издательства «Наука», Москва Г-99, Шубинский пер., 10

СПИСОК ОПЕЧАТОК И ИСПРАВЛЕНИЙ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
История математики, т. I			
144	7 стр.	$\delta\upsilon\nu\alpha\mu\zeta$	$\delta\upsilon\nu\alpha\mu\zeta$
145	3 св.	$\Delta^v\chi$	Δ^{vx}
194	20 св.	$x = -(-1)^n \dots, y = -(-1)^n \dots$	$x = (-1)^n \dots, y = (-1)^n \dots$
242	16 св.	<i>ABE</i> и <i>AFE</i>	<i>AEB</i> и <i>AEF</i>
290	2 св.	<i>R</i> . 14. $\tilde{p}$ <i>R</i> . 180	<i>R</i> . ² . 14. $\tilde{p}$ <i>R</i> . ² . 180
291	18 св.	Кристофор	Кристоф
291	26 стр.	($\mathcal{C}$)	($\mathcal{C}$ $\mathcal{C}$)
	24 стр.	$x^{13} =$	, $x^{13} =$
	24 стр.	$x^{15} = \beta$	$x^{15} = \mathcal{C} \beta$
	23 стр.	$x^{18} = \mathfrak{z} \mathcal{C}$	$x^{18} = \mathfrak{z} \mathcal{C} \mathcal{C}$
338	28 стр.	geometrical of	geometrical treatise of
343	14 св. прав. колонка	Licius	Lucius
344	21 св. лев. колонка	(ум. 1225)	(ум. 1255)
349	13 св. лев. колонка	Krist'an	Christoph
История математики, т. II			
166	7 св.	$\frac{\Phi^6}{90}$	$\frac{\Phi^6}{45}$
169	20 св.	неделмых в	неделимых и
206	Рис. 35	<i>ATQP</i>	<i>ATPQ</i>
218	2 св.	нередко	возможно
228	17 св.	$n = 1, 3, 5, \dots, ^2$	$n = 1, 3, 5, \dots$
	21 св.	при любом <i>m</i> .	при любом <i>m</i> . ²
264	9 стр.	разности высот	расстояния
	8 стр.	тела изменяются	тела от данной точки изменяются
268	4 св.	alüsque	aliisque
271	21 св.	(парацентрическая изохрона; стр. 264)	, названная Лейбницем изохронной (ср. стр. 264),
281	4 стр.	что исчисление	что некоторое исчисление
292	9 стр.	<i>Cassuna</i>	<i>Cassina</i>